Olimpiadi Italiane di Astronomia

Bignamino

di

Astronomia

Guida alla risoluzione dei problemi

Società Astronomica Italiana
1871 Società degli Spettroscopisti

Planetario di Reggio Calabria

INDICE

Meccanica celeste

Strumenti ottici

Astrofisica

Cosmologia elementare

Problemi ed esercizi

Sfera e trigonometria sferica

Bibliografia

"In Astronomia ogni argomento va meditato ed approfondito in senso critico, va analizzato nei suoi elementi essenziali e collegato a quanto precede ed a quanto segue".

(prof. Leonida Rosino)

Il bignamino di astronomia ha lo scopo di aiutare gli olimpionici alla preparazione alle varie fasi delle Olimpiadi Italiane di Astronomia. Costituisce la griglia essenziale per la risoluzione dei problemi. L'abbiamo pensato come una bussola, soprattutto, per gli studenti che provengono da Istituti dove la fisica non è disciplina curriculare nel biennio. Seguendo il Syllabus, abbiamo suddiviso il "bigino" in quattro macrotemi:

1) Meccanica Celeste (cinematica e dinamica celeste)
2) Strumenti ottici
3) Astrofisica
4) Cosmologia elementare

Ciascun macrotema è corredato da sezioni e da esercizi di riferimento.

Introduzione

MISURA DEGLI ANGOLI: GRADO, RADIANTE, ORA

L'ampiezza di un arco o del corrispondete angolo al centro si può misurare in uno dei seguenti sistemi:

- Il **sistema sessagesimale**: ha come unità di misura il **grado**

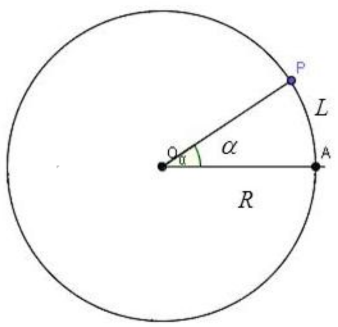
Il grado.

Il grado definito come la 360-esima parte dell'angolo giro. I suoi sottomultipli sono primi e i secondi.

- 1 grado è diviso in 60 primi, 1°= 60'
- 1 primo è diviso in 60 secondi, 1' = 60''
- Quindi un grado equivale a 3600''

Il **sistema circolare**: ha come unità di misura il **radiante**

Radiante Il **radiante (** ρ) è l'ampiezza dell'angolo al centro di una circonferenza che con i suoi lati intercetta un arco uguale al raggio**.**



Dunque il rapporto tra la misura dell'arco e la misura del raggio è un numero reale α che rimane costante, α=$\frac{L}{R}$;

$\alpha^{rad} = \alpha° \frac{\pi}{180}$; $\alpha° = \alpha^{rad} \frac{180°}{\pi}$

L'ampiezza di un radiante è:

in gradi ρ°= 57° 17' 44''~ 57°,3

in primi ρ'~3438'

in secondi ρ'' ~206265''

(numero magico!!!!)

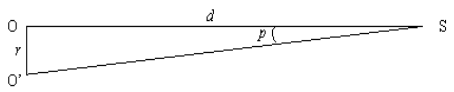
In astronomia è necessario molto spesso convertire la misura in gradi di un arco in misura di ora o viceversa

L'ampiezza di un angolo giro misurato in gradi: 360° in ore è 24^h**;** $1^h = \frac{360}{24}$ **= 15°;** 1^m**= 15'** 1^s**=15''**

DISTANZE DEI CORPI CELESTI

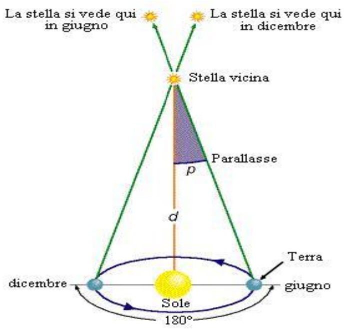
La distanza dei corpi celesti viene determinata attraverso la misura di un angolo detto **parallasse**.

L'angolo di parallasse è l'angolo sotto cui viene visto un oggetto se osservato da due posizioni diverse.



Si parla di parallasse geocentrica, quando la distanza tra le due osservazioni è uguale al raggio terrestre, mentre di parallasse annua, quando la distanza tra i due osservatori è uguale al semiasse maggiore dell'orbita della Terra attorno al Sole (ovvero l'Unità Astronomica). *p* l'angolo di parallasse e *d* la distanza dell'osservatore dall'oggetto-
La relazione tra la distanza e la parallasse è data dalla semplice formula: $d = r / \text{sen}\, p$

Spesso viene usato il *parsec* come unità di misura delle distanze stellari. Una stella si trova alla distanza di 1 parsec quando la sua parallasse annua è di un secondo d'arco. $d = \frac{1}{p''}$



LE DIMENSIONI APPARENTI DI UN OGGETTO

Le dimensioni apparenti di un oggetto dipendono dalla sua distanza. In astronomia il diametro angolare (o dimensione angolare) di un oggetto è la misura del suo diametro rispetto alla distanza dall'osservatore. Si calcola con la seguente formula:

$$\alpha = 2\, arctang\, \frac{D}{2d}$$

(D diametro reale e d distanza dall'osservatore).
Generalmente il diametro apparente dei corpi celesti è inferiore ad un grado.

Misurato il diametro apparente in secondi d'arco si può calcolare il diametro reale con la seguente formula:

$$D = \frac{d\alpha}{206265}$$

SISTEMI DI RIFERIMENTO ASTRONOMICI

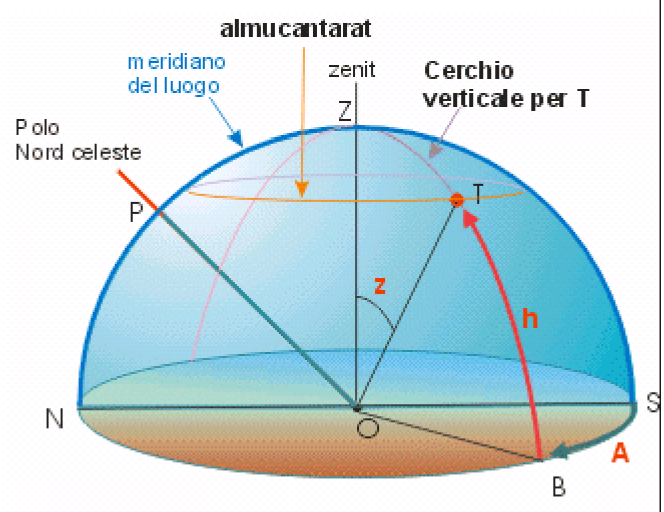
Gli elementi che definiscono i sistemi di coordinate astronomiche sono:

1) Una direzione fondamentale;
2) Un piano perpendicolare alla direzione fondamentale;
3) L'origine
4) Il verso di percorrenza
5) L'unità di misura

Noi qui sintetizziamo tre dei cinque sistemi di riferimento astronomici:

il sistema altazimutale; il sistema orario; il sistema equatoriale

Sistema altazimutale



Nel sistema **altazimutale** o **orizzontale** la *direzione fondamentale* è data dalla verticale, il piano perpendicolare è dato dall'orizzonte astronomico la verticale alla superficie terrestre passante per l'osservatore individua lo zenit e il nadir. Le coordinate in questo sistema sono l'**Azimut** (**A**) e **Altezza (h)**.

L'*azimut* del punto **T** è l'angolo formato dal piano del *cerchio verticale* passante per **T** e il meridiano astronomico. Si misura in gradi e frazioni di grado partendo dal punto cardinale sud nel senso delle lancette dell'orologio. Esso corrisponde, nel disegno, all'angolo **SOB** dove **O** è l'osservatore e **B** è l'intersezione dell'orizzonte con il *cerchio verticale* passante per **T**.

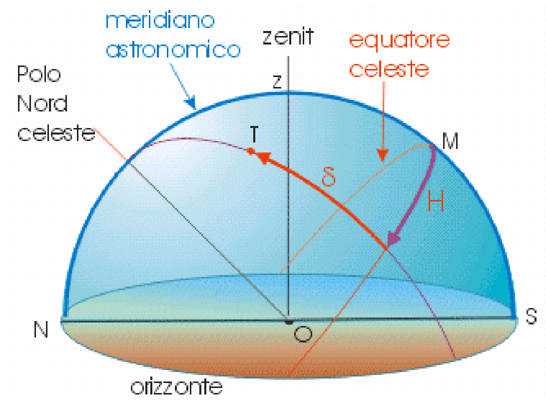
Altezza (**h**): è l'ordinata sferica di un punto sulla sfera celeste e cioè la sua distanza angolare dall'orizzonte misurata lungo il *cerchio verticale* passante per quel punto. Si esprime in gradi e frazioni di grado con valore positivo verso lo zenit e negativo verso il nadir. Nel nostro disegno, l'altezza del punto **T** corrisponde all'angolo **TOB** dove **O** è l'osservatore e **B** è l'intersezione dell'orizzonte con il *cerchio verticale* passante per **T**. L'arco complementare dell'*altezza* si chiama **distanza zenitale** e nel nostro disegno è rappresentata dall'angolo **ZOT** dove **Z** è lo zenit dell'osservatore. La *distanza zenitale* si indica generalmente con **z**. Nel sistema azimutale entrambe le coordinate (*azimut* e *altezza*) delle stelle variano sensibilmente con il passare del tempo a causa del moto di rotazione della Terra.

Sistema orario

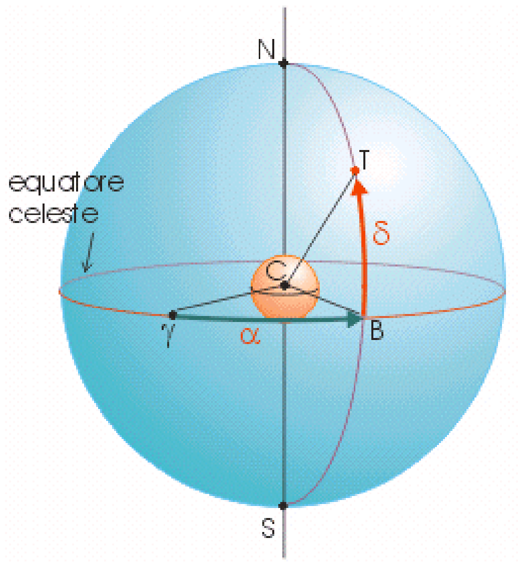
Questo sistema di coordinate astronomiche ha come direzione e piano fondamentali rispettivamente l'asse del mondo e il piano dell'equatore. Le coordinate sferiche di questo sistema sono: **Angolo orario** (**H**) e la **Declinazione** (δ)

L'angolo orario è la distanza angolare tra il *cerchio orario* che passa per il punto e il meridiano astronomico. Si misura in ore e frazioni di ora lungo l'equatore celeste, partendo dal meridiano astronomico, in senso orario per un osservatore boreale.

La declinazione rappresenta la distanza angolare tra un punto della sfera celeste e l'equatore celeste, misurata lungo il cerchio orario che passa per tale punto. Si misura in gradi e frazioni di grado con segno positivo verso il polo nord celeste e negativo verso il polo sud. L'origine del sistema è il punto M detto mezzocielo. In questo sistema nel corso del giorno le stelle variano il loro *angolo orario* mentre rimane costante la loro *declinazione*.



Sistema equatoriale



Questo sistema di coordinate astronomiche ha come direzione e piano fondamentali rispettivamente l'asse del mondo e il piano dell'equatore. Le coordinate sferiche di questo sistema sono: **Ascensione retta** (α), λα **Declinazione** (δ)L'origine è il punto gamma (γ)

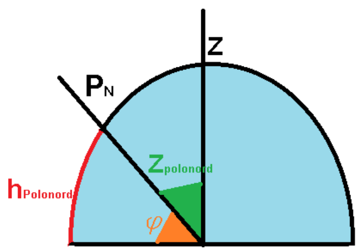
L'ascensione retta si misura di solito in ore, minuti e secondi, lungo l'equatore celeste, partendo dal punto gamma e con senso di percorrenza antiorario.

Declinazione rappresenta la distanza angolare tra un punto della sfera celeste e l'equatore, misurata lungo il cerchio orario che passa per tale punto. Si misura in gradi e frazioni di grado con segno positivo verso il polo nord celeste e negativo verso il polo sud.

RELAZIONI TRA I SISTEMI DI RIFERIMENTO

Latitudine del luogo

$$\varphi = h_{poloNord} = 90° - z_{PoloNord}$$



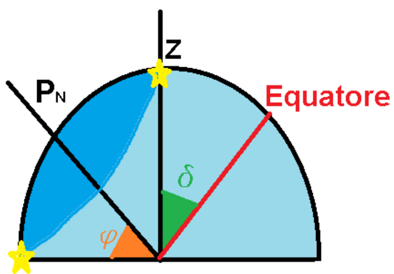
La latitudine geografica φ di una località sulla superficie della Terra è l'altezza del polo celeste sul suo orizzonte. Orizzonte e Zenit sono separati da un angolo retto. La latitudine geografica del luogo si ottiene sottraendo da 90° l'altezza del polo stesso.

Formule inverse:

$$z_{PoloNord} = 90° - \varphi$$

Stelle circumpolari

$$\delta \geq 90° - \varphi$$



Vista da un qualsiasi luogo della superficie terrestre (quando siamo all'Equatore la situazione di complica), una parte della volta celeste non tramonta mai, e rimane sempre al di sopra dell'orizzonte. Tale parte di cielo è detta "circumpolare". Essa contiene le stelle che hanno declinazione δ maggiore o uguale a un valore limite che si ottiene sottraendo da 90° il valore della latitudine geografica φ del luogo.

Se la declinazione è compresa tra

$$-(90° - \varphi) < \delta < +(90° - \varphi)$$

le stelle sono occidue: sorgono e tramontano sull'orizzonte dell'osservatore

Se

$$\delta < -(90° - \varphi)\,; \;\; \delta < -90° + \varphi$$

Le stelle sono anticircumpolari (cioè quelle che non sorgono mai, e stanno sempre al di sotto dell'orizzonte)

Culminazione

Una stella culmina quando raggiunge la sua massima altezza cioè è sul meridiano.

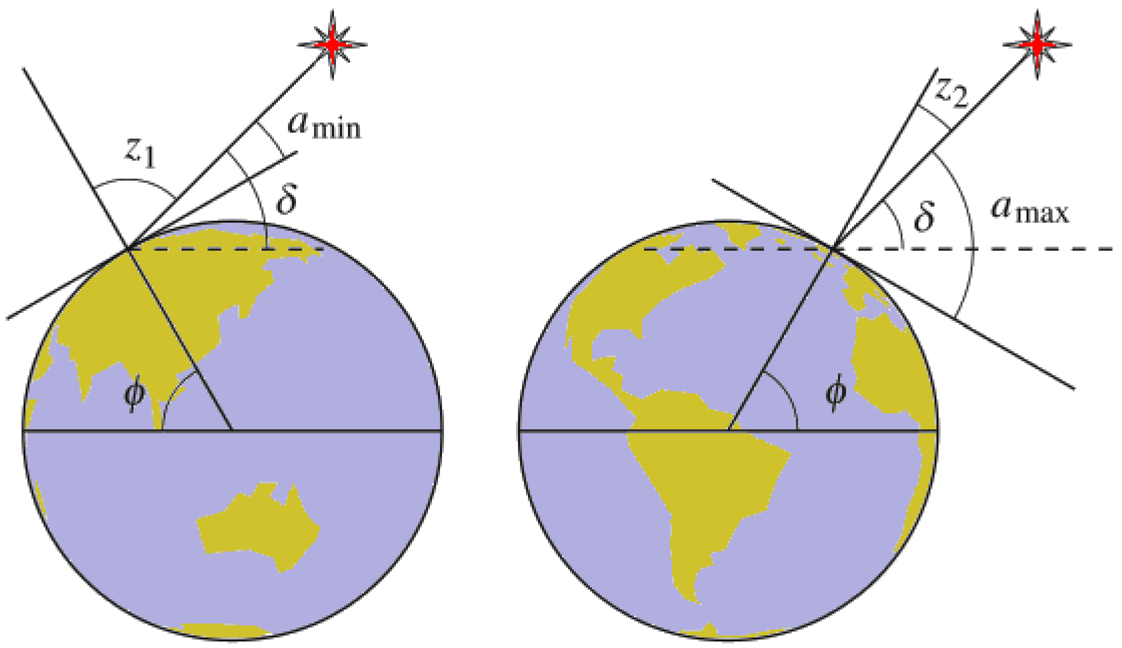
La declinazione δ , la distanza zenitale z sono legate in modo semplice alla latitudine φ dell'osservatore.

Al momento della culminazione superiore (massima altezza della stella sull'orizzonte) si ha:

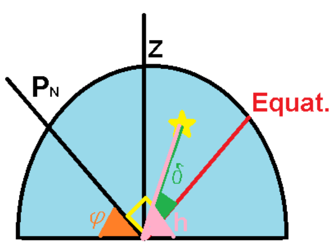
$$z = \varphi - \delta$$

Al momento della culminazione inferiore si ha

$$z = \varphi + \delta - 180°$$



Altezza (culminazione superiore/inferiore)



Una stella culmina superiormente quando raggiunge la sua massima altezza vista un determinato luogo (ad una determinata latitudine φ).

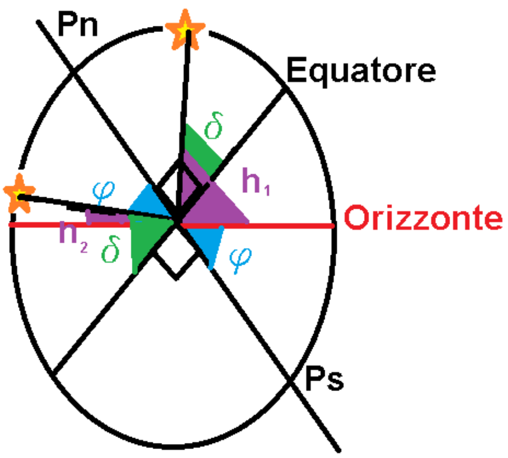
$$h_1 = 90° \pm (\varphi - \delta)$$

Poiché l'altezza deve esere h $\leq$ 90° distinguiamo i due casi:

1) Se $\delta < \varphi$ h=90°- φ + δ (va preso il segno meno)
2) Se $\delta > \varphi$ h=90°+ φ - δ (va preso il segno più)

Analogamente in culminazione inferiore:

$$h_2 = -90° + \varphi + \delta$$



Poiché se $\delta < \varphi$

$$h_2 = \delta - (90 - \varphi)$$

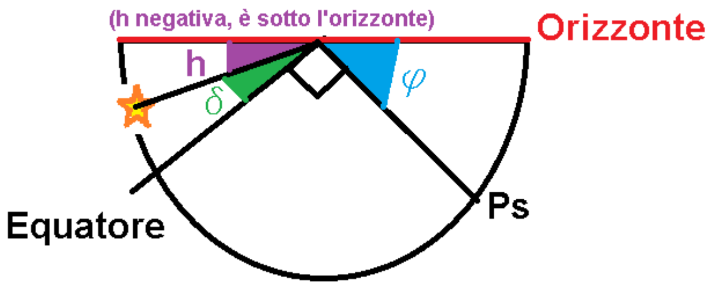
$$h_2 = \delta - 90 + \varphi$$

$$h_2 = -90 + \delta + \varphi$$

Se $\delta > \varphi$

$$h_2 = \delta + (\varphi - 90)$$

$$h_2 = -90 + \delta + \varphi$$



<u>La formula per il calcolo della culminazione inferiore è sempre la stessa!</u>

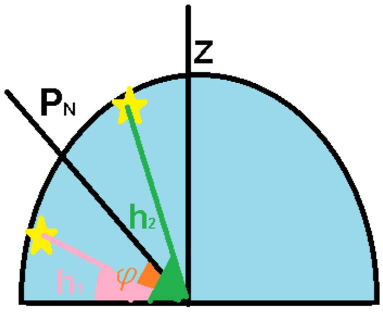
<u>Formule inverse della h=90°+ φ - δ :</u>

$$\varphi = 90° - h + \delta$$

$$\delta = \varphi + h - 90°$$

Latitudine del luogo (culminazione superiore ed inferiore)

$$\varphi = \frac{h_1 + h_2}{2}$$



Questa formula è valida per tutte le stelle, ma la si usa spesso per conoscere la latitudine di un luogo osservando una stella circumpolare. La latitudine, infatti, non è altro che una "media" tra le due altezze (culminazione superiore ed inferiore).

Formule inverse:

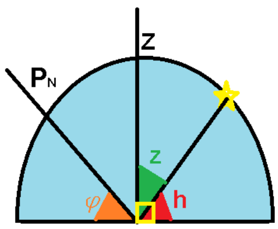
$$h_1 = 2\varphi - h_2$$

$$h_2 = 2\varphi - h_1$$

Per una stella circumpolare la minima altezza è h_{min}= δ + φ - 90°.

Distanza zenitale

$$z = 90° - h$$



La distanza zenitale indica quanto dista la stella dallo zenit, che si trova sulla verticale dell'osservatore. Per trovarla, basta sottrarre a 90° (la verticale e l'orizzonte sono separati da un angolo retto) l'altezza della stella h.

Formule inverse:

$$h = 90° - z$$

Ascensione retta

Tra l'ascensione retta $\boldsymbol{\alpha}$,il suo angolo orario H ed il tempo siderale relativi ad un dato osservatore vale la relazione:

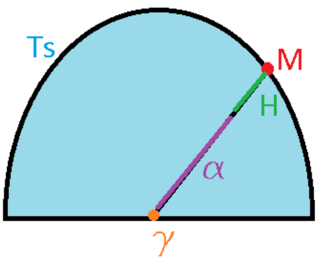
$$T_s = \alpha + H$$

Nota

Quando il punto γ passa al meridiano T_s = 0 (Il tempo siderale è definito come l'angolo orario del punto γ) ; quando la stella passa al meridiano H= 0 e

$$T_s = \alpha.$$

Il tempo siderale coincide con l'ascensione retta delle stelle che passano al meridiano.



Per conoscere l'ascensione retta di una stella α, bisogna calcolare la differenza tra il tempo siderale del luogo T_s di osservazione e l'angolo orario H della stella stessa.

$$\alpha = T_s - H$$

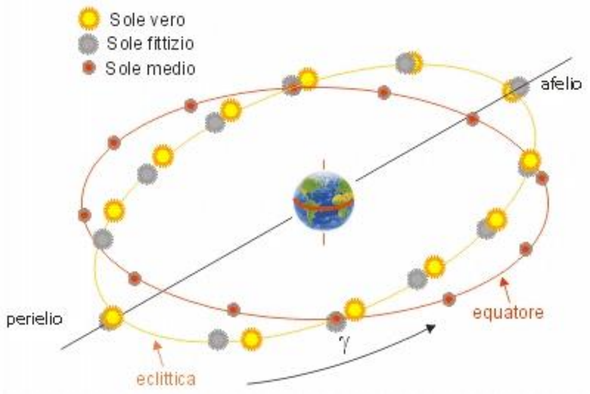
L'angolo orario si trova dalla: $H = T_s - \alpha$

il punto nord ha H di 12 h e declinazione 90 - latitudine da noi H 0 e declinazione 90+ latitudine altro emisfero per il punto sud i due predetti valori si invertono per l'angolo orario e quelli della declinazione diventano opposti

MISURA DEL TEMPO

La misura del tempo viene effettuata dal movimento di rotazione diurna della volta celeste (rotazione della Terra) e dal movimento annuo del Sole (rivoluzione della Terra attorno al Sole).

La rotazione della Terra attorno al suo asse è quasi costante quindi l'angolo di rotazione, rispetto ad un qualsiasi riferimento iniziale consente di misurare il tempo. Come riferimento iniziale si prende l'istante del passaggio del punto al meridiano del luogo. La durata del giorno dipende da questo punto scelto.



In Astronomia i punti adottati sono: Il punto γ; il centro del disco apparente del Sole (Sole vero); il Sole medio (un Sole ideale che parte dal punto γ assieme al Sole vero percorre l'equatore celeste con velocità angolare costante in modo da ritornare all'equinozio di primavere assieme al Sole vero).

Le tre unità di tempo definite da questi punti si chiamano: giorno siderale, giorno solare vero, giorno solare medio. Il tempo da esse misurato è: tempo siderale, tempo solare vero, tempo solare medio.

Nota: Non sono tempi diversi, ma solo diverse unità di misurare il tempo!

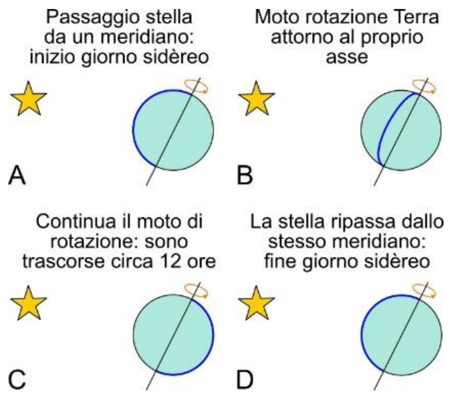
Giorno siderale – tempo siderale

Si definisce giorno siderale l'intervallo di tempo compreso tra due successivi passaggi del punto γ allo stesso meridiano del luogo.

Si definisce tempo siderale l'intervallo di tempo compreso tra il passaggio al meridiano del punto di primavera ad un'altra posizione qualsiasi.

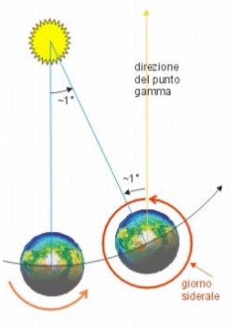
$$t_s = H + \alpha$$

(Tempo siderale = angolo orario Sole + ascensione retta Sole medio)



Giorno solare vero-Tempo solare vero

Il giorno solare vero è l'intervallo di tempo compreso tra due passaggi superiori o inferiori del centro del Sole.



Il tempo solare vero è l'intervallo di tempo compreso tra il passaggio inferiore del Sole ad un altro punto.

Al meridiano il $T_{sole\ vero} = H_{Sole\ vero} + 12^h$

Giorno solare medio - Tempo solare medio

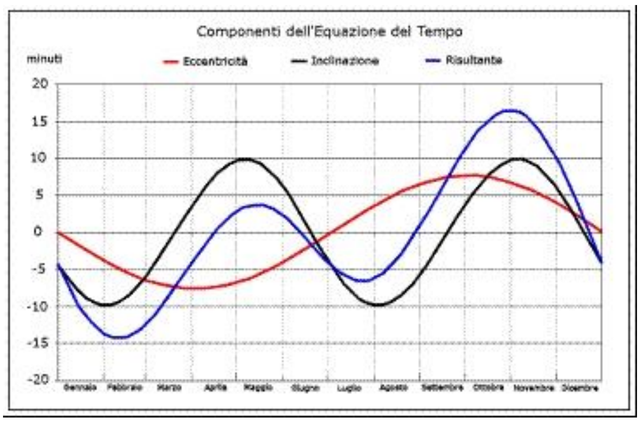
Il giorno solare medio è l'intervallo compreso tra due passaggi superiori o inferiori del Sole medio.

Il tempo solare medio è l'intervallo di tempo compreso tra il passaggio inferiore del Sole medio ad un altro punto.

$$T_{sole\ medio} = H_{Sole\ medio} + 12^h$$

Equazione del Tempo

Si definisce equazione del tempo la differenza tra il tempo medio ed il tempo solare vero allo stesso istante.



$$E = T_{sole\ medio} - T_{sole\ vero}$$

$$E = H_{Sole\ medio} - H_{Sole\ vero}$$

$$E = \alpha_{Sole\ medio} - \alpha_{Sole\ vero}$$

Il tempo solare medio ad un dato istante è dato dal Tempo solare vero più l'equazione del tempo:

$$T_{sole\ medio} = T_{sole\ vero} + E$$

Relazione tra tempo solare e tempo siderale

Consideriamo la posizione del sole a 24 ore di distanza:

$$t_{1s}=H_{s1}+\alpha_{S1}$$

$$t_{2s}=H_{s2}+\alpha_{S2}$$

Calcolando la differenza tra le due espressioni si ha:

$$t_{2s}-t_{1s}=(H_{s2}-H_{s1})+(\alpha_{S2}-\alpha_{S1})$$

$$(H_{s2}-H_{s1})=24$$

Mentre la differenza in ascensione retta $(\alpha_{S2}-\alpha_{S1})$ dà lo spostamento angolare diurno del sole medio sull'equatore che in gradi è $\frac{24}{365,25}$

Pe cui:

$$t_{2s}-t_{1s}=24\text{h}+\frac{24}{365,25}$$

$$t_{2s}-t_{1s}=24\left(1+\frac{1}{365,25}\right)$$

$$t_{2s}-t_{1s}=24\,\frac{366,25}{365,25}$$

Un giorno solare medio= $\frac{366,25}{365,25}$ giorni siderali

Un giorno siderale= $\frac{365,25}{366,25}$ giorni solari veri

Il rapporto K = $\frac{366,25}{365,25}$, K=1,002738 serve per convertire gli intervalli di tempo solare medio in intervalli di tempo siderali.

$$\Delta T_s=\text{K}\,\Delta T_m$$

Il rapporto K' = $\frac{365,25}{366,25}$; K' = 0,997270 serve per convertire gli intervalli di tempo siderali in intervalli ti tempo solare medio:

$$\Delta T_m=\text{K'}\,\Delta T_s$$

24 ore di tempo medio corrispondono a 24h 03m 56,55s di tempo siderale; viceversa un giorno siderale è 23h 56m 04s di tempo solare medio.

Se s è il tempo siderale ad un certo istante ad un dato meridiano, mentre alla mezzanotte precedente sullo stesso meridiano, il tempo siderale era S dalla mezzanotte sono passati (s-S) ore, minuti, secondi di tempo siderale che corrispondono a (s-S) K' di tempo solare medio. Poiché a mezzanotte il tempo solare medio è 0^h $T_m=$ (s-S). K' rappresenta il tempo solare medio all'istante del tempo siderale s.

Se al meridiano di quel luogo, alla mezzanotte di una certa data il tempo siderale era S, all'istante di tempo medio solare sarà:

$$s = S + T_m . K$$

NOTA:

E' sempre necessario conoscere il tempo siderale S alla mezzanotte del meridiano dato. Per questo sono stati costruiti annuari che forniscono il tempo siderale S_0 alla mezzanotte del meridiano fondamentale di GW.

Il tempo siderale S, alla mezzanotte, ad una data longitudine λ è dato da:

$$S = S_0 - \frac{\lambda^h}{24^h}\,(3^m\,56^s,55)$$

Ora locale e longitudine

Si definisce tempo locale medio il tempo regolato sul meridiano del luogo.

Nella vita quotidiana è scomodo utilizzare questo tempo, per cui il primo luglio 1919 sono stati introdotti i fusi orari. In base a questa suddivisione il tempo medio è determinato solo per 24 meridiani geografici principali separati da 15° gradi (un'ora). I fusi orari sono numerati da 0 a 23 ed il meridiano passante per GW costituisce l'origine (fuso = 0).

Il tempo medio locale è dato da:

$$t_l = t_f - \Delta\lambda$$

dove $\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_O$

Nota

1) La differenza tra le ore locali (siderali o solari) di due meridiani misurate allo stesso istante è sempre uguale alle differenze di longitudini;
2) Poiché i confini dei fusi orari distano circa 7°,5 dal meridiano centrale la differenza t_l - t_f può essere leggermente maggiore o minore di $\pm\ 30^m$

Tempo Universale

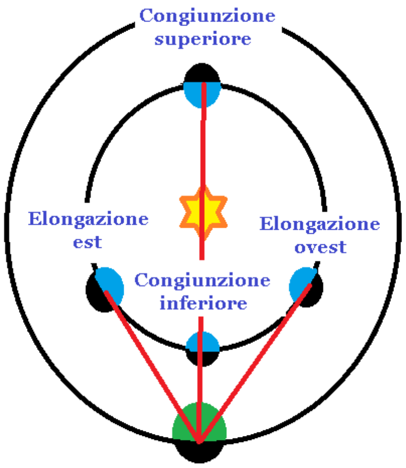
Il tempo solare medio del meridiano di GW si chiama Tempo Universale (TU).

Per quanto precedentemente detto, il tempo medio locale è uguale al tempo universale più la longitudine del luogo espressa in ore e considerata positiva ad est di GW:

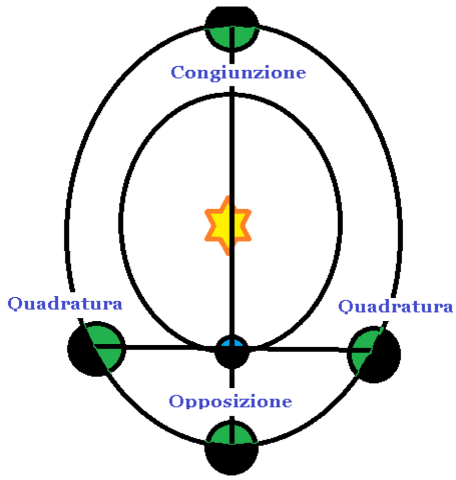
$$t_l = \mathrm{TU} + \lambda$$

MOTO APPARENTE DEI PIANETI

I pianeti si muovono in vicinanza dell'eclittica, ma il loro movimento visto dalla Terra è più complicato di quello del Sole e della Luna. Il Sole e la Luna, riferendo il loro moto rispetto alle stelle fisse, si muovono di moto diretto cioè antiorario per i pianeti si osserva che in generale si muovono di moto diretto ma ce certi tratti, variabili da pianeta a pianeta, si muovono di moto retrogrado. Il pianeta dopo avere raggiunto una posizione di stazionarietà inverte il moto. Questo è molto più evidente per i pianeti interni Mercurio e Venere, che oscillano avanti e indietro rispetto alla posizione del Sole venendosi a trovare ora da una parte ora dall'altra rispetto ad esso. Quando il pianeta è in **congiunzione superiore** è invisibile perchè nasce e tramonta con il Sole ma essendo in questo momento più veloce del Sole dopo qualche tempo può essere visto dopo il tramonto ad occidente (si trova a sinistra del Sole). **L'elongazione orientale** cresce nei giorni seguenti e contemporaneamente decresce la sua velocità angolare e quando raggiunge la stessa velocità angolare del Sole per qualche istante si muove mantenendo la stessa distanza: il pianeta raggiungere la massima elongazione orientale. Per venere questo valore è circa 46° per Mercurio è variabile dai 18° ai 28°. Da questo momento il pianeta comincia il suo avvicinamento al Sole ritornando, con moto retrogrado, in congiunzione con esso ma questa volta in **congiunzione inferiore**. Ritorna invisibile (potrebbe esserci un transito!!!!) Continuando nel suo moto retrogrado appare visibile ad occidente (a destra del Sole) ed è visibile prima del sorgere del Sole (**elongazione occidentale**). Questo ci dice che i pianeti inferiori non possono **mai trovarsi in quadratura o opposizione**.



I pianeti esterni invece possono assumere qualsiasi distanza dal Sole da 0° a 180° e quindi possono trovarsi nelle **due precedenti configurazioni**. Raggiunta l'elongazione massima di 180° i pianeti si trova dalla parte opposta a quella del Sole, la velocità retrograda è massima e raggiungono anche il massimo della luminosità. Oggi noi sappiamo che tutto questo è dovuto è il risultato della composizione del moto della Terra e di quello dei pianeti attorno al Sole: semplificando osserviamo un oggetto in movimento essendo noi stessi in movimento. Le velocità dei pianeti variano, più sono vicini al Sole più velocemente si muovono. I due pianeti essendo più vicini al Sole sorpassano la Terra durante il loro moto, mentre è la Terra a sorpassare i pianeti esterni quando sono vicini all'opposizione e quindi essi sembrano muoversi all'indietro.



Ed allora se indichiamo con T Il nostro anno siderale, con P il periodo sidereo del Pianeta e con S il periodo siderale (il tempo intercorso tra due congiunzioni o due opposizioni successive) la composizione delle velocità ci consente di calcolare la velocità relativa del pianeta rispetto alla Terra.

Per i pianeti interni (la Terra si muove più lentamente):

$$\frac{2\pi}{S} = \frac{2\pi}{P} - \frac{2\pi}{T}$$

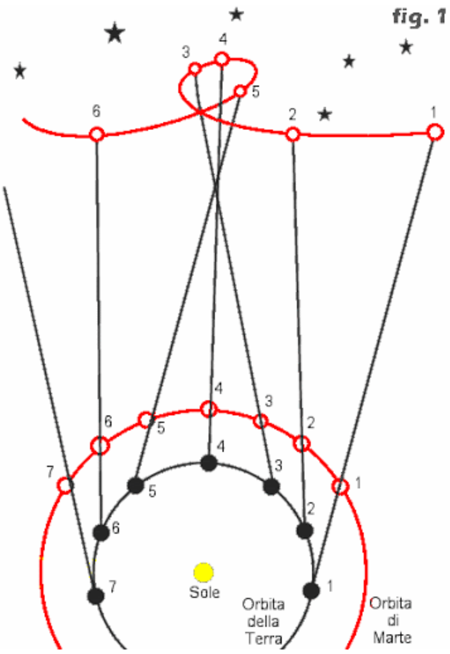
$$\boldsymbol{\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{T}}$$

Per i pianeti esterni (la Terra si muove più velocemente):

$$\frac{2\pi}{S} = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{P}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{P}}$$

Il movimento di tutti i pianeti attraverso le stelle fisse segue apparentemente la stessa direzione di quello della Luna (e del Sole) - con una strana variante: talvolta il loro moto apparente cambia temporaneamente verso ("moto retrogrado"). Questo è molto più evidente per Mercurio e Venere, che oscillano avanti e indietro rispetto alla posizione del Sole. Durante il moto del Sole attraverso le stelle - lungo le costellazioni dello zodiaco - questi pianeti talvolta si muovono nello stesso verso e quindi il loro movimento si somma a quello del Sole, ma altre volte il loro moto apparente si oppone a quello del Sole, facendo sì che sembri che si muovano all'indietro ("**moto retrogrado**").Gli altri tre pianeti visibili ad occhio nudo si possono trovare in qualunque posizione lungo l'eclittica - anche a mezzanotte, in posizione direttamente opposta a quella del Sole, e quando questo avviene raggiungono il massimo della luminosità. Marte sembra muoversi più rapidamente, Giove un po' meno, e Saturno è il più lento. Comunque tutti mostrano questa enigmatica stranezza: vicino al punto in cui il loro percorso apparente nel cielo è esattamente in posizione opposta al Sole ("**opposizione**"), il loro movimento tra le stelle temporaneamente si **inverte**. Oggi noi comprendiamo molto bene tutto questo (vedi fig.1). I pianeti sono oggetti sferici come la Terra - Venere, Mercurio e Marte sono più piccoli, Giove e Saturno molto più grandi. Anche la Terra è un pianeta e ne esistono anche altri (troppo deboli per essere visti senza un telescopio), tutti che orbitano attorno al Sole sul piano, o vicino al piano, dell'eclittica. La loro **velocità tuttavia varia** - più sono vicini al Sole e più rapidamente si muovono (vedi la sezione “terza legge di Keplero”). Quindi, quando i tre pianeti esterni sono vicini all'opposizione, la Terra, che orbita più vicina al Sole, li sorpassa, e quindi essi sembrano muoversi all'indietro. Il moto retrogrado dei due pianeti interni ha una causa simile. Essendo più vicini al Sole, sono essi che sorpassano la Terra durante il loro moto.



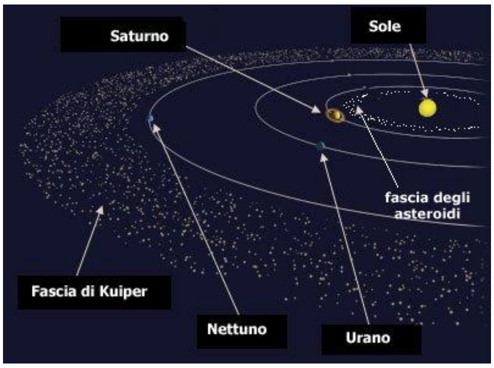
Sommario di quanto è noto oggi sui pianeti

Viene qui riportato un breve sommario dei componenti del sistema solare. In genere vengono distinte quattro classi di oggetti:

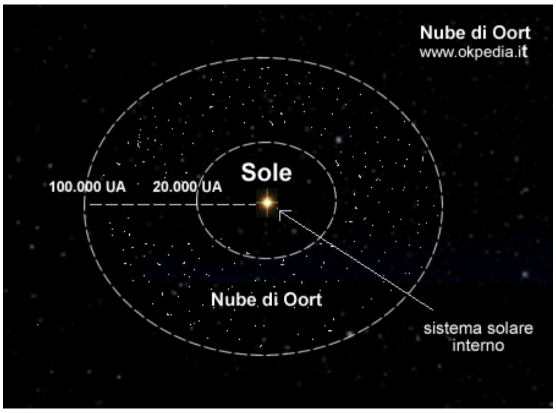
1. I pianeti maggiori, in ordine di distanza dal Sole - **Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno, Urano** e **Nettuno**. Tutti tranne i due più interni hanno dei satelliti, e tutti e quattro i più esterni hanno degli anelli, composti da piccoli ciottoli di materia in orbita attorno al pianeta.

2. **Asteroidi** o pianetini, in maggioranza - anche se non tutti - posti tra Marte e Giove. Il loro diametro arriva fino a 500 Km.

3. La "**fascia di Kuiper**" di oggetti ghiacciati oltre l'orbita di Nettuno, di cui il più noto (anche se ora si è scoperto che è solo il secondo come dimensioni) è **Plutone**, scoperto nel 1930 e delle dimensioni della nostra Luna. La fascia ha preso il nome dell'astronomo belga Gerard Kuiper, si estende probabilmente a una distanza doppia di quella di Nettuno e si stima che consista di circa 100000 oggetti (finora ne sono stati identificati circa 1000), molti dei quali con un diametro di soli 100 Km o meno.

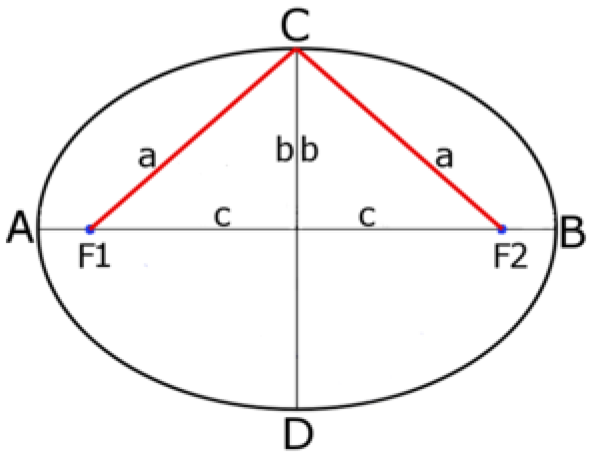


4. **Comete**, tradizionalmente divise in "non ricorrenti" (il nome ufficiale è "comete a lungo periodo") e comete "periodiche". Le comete **non ricorrenti** si pensa che provengano dalla "**nube di Oort**", un enorme agglomerato quasi **sferico** di oggetti ghiacciati agli estremi limiti del sistema solare. Essi sono debolmente legati al Sole e, di tanto in tanto, l'attrazione gravitazionale di qualche stella lontana probabilmente cambia un poco il moto di alcuni di essi, lanciandoli in direzione del Sole. In tal caso, diventano visibili come comete, quando la luce del Sole fa evaporare una parte della loro superficie generando la chioma e la coda della cometa. Le comete **periodiche** una volta erano considerate come oggetti che avevano iniziato come oggetti non ricorrenti ma poi erano state deviate e catturate dall'attrazione gravitazionale dei pianeti più grandi. Oggi si ritiene che provengano dalla fascia di Kuiper come classe di oggetti noti come **Centauri**.



LE LEGGI DEL MOTO DEI PIANETI

Prerequisito: L'ellisse



Luogo geometrico dei punti del piano per i quali si mantiene costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Detta in parole più semplici, l'ellisse non è altro che una circonferenza "schiacciata". Un elemento fondamentale che ci permette di capire di quanto questa viene compressa è l'eccentricità e. L'eccentricità è definita come il rapporto tra la semidistanza focale e il semiasse maggiore:

$$e = \frac{c}{a}$$

Formule inverse:

$$c = ae$$

$$a = \frac{c}{e}$$

Infatti, nell'ellisse possiamo individuare:

- Semiasse maggiore (a)
- Semiasse minore (b)
- Semidistanza focale (c)

Indicheremo quindi con 2a il semiasse maggiore (AB), con 2b il semiasse minore (CD) e con 2c la distanza focale (F_1F_2).

ATTENZIONE: l'eccentricità dell'ellisse è SEMPRE compresa tra 0 e 1 ($0<e<1$). Se questa fosse uguale a 0, i due fuochi andrebbero a coincidere con l'origine e l'ellisse diventerebbe una circonferenza. Se fosse uguale a 1, diventerebbe una parabola; se fosse $e>1$ diventerebbe una iperbole.

Dalla figura, si nota che la somma delle distanze dai due punti fissi detti fuochi è costante ed è pari alla lunghezza dell'asse maggiore (2a). Quindi, si può anche applicare il teorema di Pitagora:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

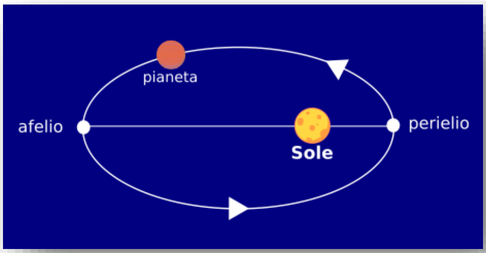
Formule inverse:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

LEGGI DI KEPLERO

PRIMA LEGGE



Enunciato: i pianeti descrivono intorno al Sole orbite ellittiche, in cui questo occupa uno dei fuochi.

Si può quindi notare che la distanza di un pianeta attorno al Sole non si mantiene costante, bensì ci sarà un punto in cui questo sarà più vicino al Sole (perielio) e uno in cui sarà più lontano (afelio).

Possiamo quindi calcolare le due distanze:

$$da = a(1 + e)$$

$$dp = a(1 - e)$$

Formule inverse:

$$a = \frac{da}{1 + e}$$

$$a = \frac{dp}{1 - e}$$

$$e = \frac{da}{a} - 1$$

$$e = 1 - \frac{dp}{a}$$

Inoltre, si nota anche che dalla somma delle due distanze otteniamo l'asse maggiore dell'orbita:

$$2a = da + dp$$

E il semiasse è quindi dato da:

$$a = \frac{da + dp}{2}$$

Formule inverse:

$$da = 2a - dp$$

$$dp = 2a - da$$

La distanza focale è data dalla differenza delle due distanze:

$$2c = da - dp$$

$$c = \frac{da - dp}{2}$$

Formule inverse:

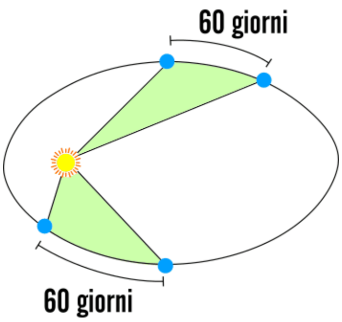
$$da = 2c + dp$$

$$dp = da - 2c$$

Quindi l'eccentricità dell'orbita può essere anche scritta come:

$e = \frac{da-dp}{da+dp} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$

SECONDA LEGGE



Enunciato: il raggio vettore che congiunge il Sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali

Dalla seconda legge comprendiamo che la velocità del pianeta intorno al Sole non è costante: al perielio viaggerà più velocemente che all'afelio. Quindi, si può affermare che le velocità sono inversamente proporzionali alle distanze:

$$\frac{Va}{Vp} = \frac{dp}{da}$$

Formule inverse:

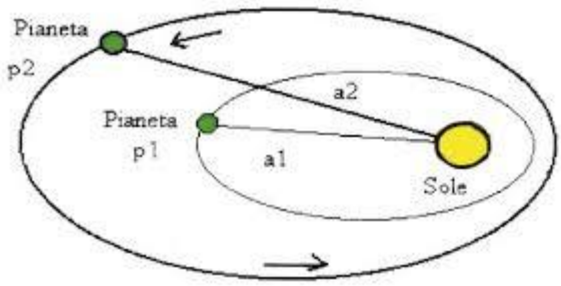
$$Va = \frac{dp\, Vp}{da}$$

$$Vp = \frac{Va\ da}{dp}$$

$$da = \frac{Vp\ dp}{Va}$$

$$dp = \frac{Va\ da}{Vp}$$

TERZA LEGGE



Enunciato: i cubi dei semiassi maggiori sono proporzionali ai quadrati dei periodi di rivoluzione

$$\frac{a^3}{T^2} = k$$

Dalla terza legge, si nota che esiste una relazione tra periodo di rivoluzione e lontananza dal corpo centrale. Sono infatti legati tra loro dal valore di una costante che è stata indicata con k.

Per i corpi orbitanti intorno ad una massa comune (come ad esempi o per i corpi del Sistema solare) questa legge può essere anche scritta come:

$$\frac{{a_t}^3}{{T_t}^2} = \frac{{a_m}^3}{{T_m}^2} = \frac{{a_s}^3}{{T_s}^2} = \cdots$$

PER I CORPI DEL SISTEMA SOLARE, se si inserisce in formula il valore del semiasse maggiore in unità astronomiche (UA) e il periodo di rivoluzione in anni, il valore di questa costante è uguale a 1. Infatti, ricavandola per la Terra:

$$\frac{(1\ UA)^3}{(1\ anno)^2} = 1$$

E se k=1 per la Terra, vale per tutti gli altri corpi orbitanti intorno al Sole.

NEWTON E LA GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Con le leggi di Keplero siamo ancora in quella parte di fisica che descriviamo come cinematica: descriviamo perfettamente i moti dei pianeti ma non risaliamo alle cause. Newton avanzò l'ipotesi che sia i gravi in caduta libera che i pianeti vengono deviati dalla condizione di moto rettilineo uniforme dall'esistenza di una forza centrale. Nel 1684 Newton, "poggiandosi sulle spalle dei giganti" (Keplero ed il nostro Galilei), dimostrò che la forza che fa "fluttuare" i pianeti attorno al Sole dipende dall'inverso del quadrato della distanza da esso.

Integrando il suo secondo principio della dinamica con la terza legge di Keplero perviene a:

$$F_g = \frac{4\pi^2\, m}{Kr^2}$$

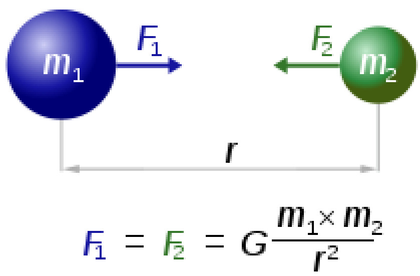
Questa forza deve dipendere anche dalla massa M del Sole ed allora:

$$F_g = \frac{4\pi^2\, mM}{MKr^2}$$

Dove K è la costante della terza legge di Keplero. Ponendo la quantità $\frac{4\pi^2}{MK}$ = G (notare che contiene la costante K e la massa del Sole) otteniamo la nota formula:

$$F_g = \frac{G\, mM}{r^2}$$

Newton dedusse che questa legge è valida non solo per i corpi del sistema solare ma in tutto l'Universo: è la Legge di Gravitazione Universale. Nel 1798 Cavendish ideò la bilancia a torsione e trovò il valore per la costante G = $6{,}67\times10^{-11}$ N m^2/kg^2



Terza legge di Keplero generalizzata

Approssimando l'orbita di un corpo a circolare e considerando trascurabile la massa del corpo orbitante, la condizione di equilibrio per la quale esso orbita è data da:

$$Fc = Fg$$

$$Forza\ centrifuga = Forza\ gravitazionale$$

La forza centrifuga è espressa come:

$$Fc = m\, a_c$$

E quella gravitazionale (dalla legge di gravitazione universale di Newton) come:

$$Fg = \frac{GMm}{a^2}$$

Sostituendo in formula:

$$ma_c = \frac{GMm}{d^2}$$

Notiamo che, semplificando m, otteniamo un modo per esprimere l'accelerazione:

$$a_c = \frac{GM}{d^2}$$

L'accelerazione è espressa come:

$$a_c = \frac{v^2}{a} = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2 a} = \frac{4\pi^2 a}{T^2}$$

Sostituendo in formula:

$$\frac{4\pi^2 a}{T^2} = \frac{GM}{a^2}$$

<u>Da cui:</u>

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

<u>Formule inverse:</u>

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM\,T^2}{4\pi^2}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}}$$

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{G\,T^2}$$

Nota: nel caso in cui la massa del corpo orbitante non fosse trascurabile, la terza legge di Keplero generalizzata diventerebbe:

$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{G\,(M+m)}{4\pi^2}$$

Nel Sistema solare la somma delle due masse si considera <u>uguale alla sola massa del Sole</u> data la relativa piccola massa dei pianeti.

NOTA:

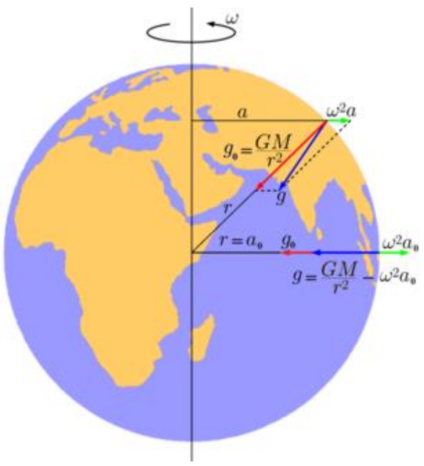
I corpi lasciati cadere verso il basso, quando la resistenza dell'aria è trascurabile, cadono con la stessa accelerazione *g*, detta **accelerazione di gravità**. Sulla superficie terrestre l'accelerazione di gravità è *g* = 9,8 m/s^2. In realtà il valore di *g* cambia da punto a punto, perché dipende fra l'altro dall'altezza del punto sul livello del mare e dalla sua latitudine. Ora che conosciamo la legge di gravitazione universale possiamo dire che i corpi cadono per effetto della forza di gravitazione che si esercita tra il corpo e la Terra. Allora:

$$g = \frac{GM}{d^2}$$

Se il corpo si trova sulla Terra o prossimo alla superficie, sostituendo a questa formula i valori relativi alla massa della Terra e al suo raggio troviamo per l'accelerazione il valore noto di **9,8 m/s^2.**

Un altro fattore che influisce sul valore di g è la rotazione terrestre in quanto ogni corpo su di essa è soggetto ad una forza centripeta per cui:

$$g' = g - \omega^2 R_T$$



"Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere, & hypotheses non fingo."

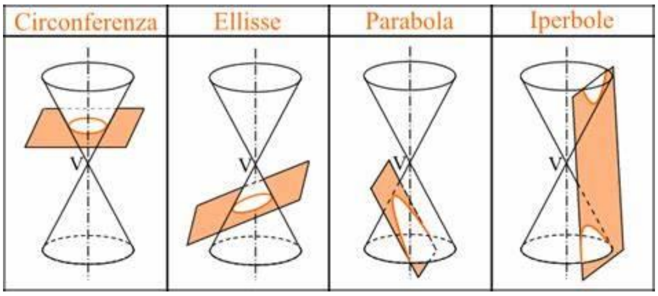
"In verità non sono riuscito a dedurre la causa di queste proprietà della gravità dai fenomeni, e non avanzo ipotesi."

Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, liber tertius*

ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLE ORBITE:

La Legge della Gravitazione Universale ci insegna che la forza d'attrazione gravitazionale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza delle due masse che si attraggono, ovvero $F \propto \frac{1}{d^2}$; a causa di questa caratteristica dell'interazione gravitazionale si può dimostrare che le orbite descritte dai corpi celesti attorno a un oggetto "attrattore" seguono particolari curve, le **coniche**.

Le coniche sono curve che si ottengono dall'intersezione di *un piano* con un *cono a due falde*. Si ottengono così *circonferenza, ellisse, iperbole e parabola*.



Circonferenza: il piano è perpendicolare all'asse (tratteggiato);
Ellisse: il piano è obliquo;
Parabola: il piano è parallelo a una delle generatrici (le due rette incidenti in V in figura);
Iperbole: il piano è parallelo all'asse del cono.

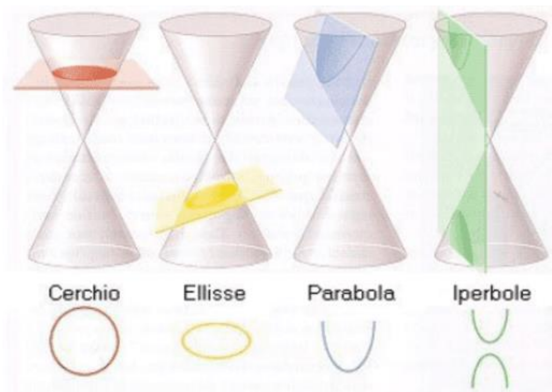
Ciò che distingue l'una dall'altra queste curve è un parametro, l'*eccentricità*:

CIRCONFERENZA: e=0

ELLISSE: 0<e<1 (più questo valore si avvicina ad 1 più l'ellisse è schiacciata)

PARABOLA: e=1

IPERBOLE: e>1 (quanto più maggiore di uno è questo valore tanto più l'iperbole è "aperta")



VELOCITÀ ORBITALE: ORBITA CIRCOLARE

Affinché il corpo rimanga in orbita è necessario che in ogni punto dell'orbita la forza centripeta sia uguale alla forza di attrazione gravitazionale:

$$F_C = F_G$$
$$m\frac{v^2}{R} = \frac{mMG}{R^2}$$
$$\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{R}} = \frac{\cancel{m}MG}{R^{\cancel{2}}}$$
$$v^2 = \frac{MG}{R}$$
$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{MG}}{\mathbf{R}}}$$

A questa velocità si dà il nome di ***prima velocità cosmica***.

VELOCITÀ SU ORBITE NON CIRCOLARI

Il problema si risolve con l'applicazione del principio di conservazione dell'energia meccanica che altro non è che la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

$$\boldsymbol{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

E poiché le velocità orbitali variano al variare dalla distanza alla prima equazione è necessario associare la seconda legge di Keplero.

Per cui il problema è risolto dalla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{K_1 + U_1 = K_2 + U_2} \\ \boldsymbol{v_a\, d_a = v_p d_p} \end{cases}$$

Nel caso della forza gravitazionale, l'energia potenziale è $U = -\frac{mMG}{R}$

L'energia cinetica è K= $\frac{1}{2}mv^2$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} v_a d_a = v_p d_p \\ \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GmM}{d_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GmM}{d_p} \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $\boldsymbol{v_a} = \sqrt{\boldsymbol{2GM \frac{d_p}{d_a(d_p+d_a)}}}$ $\quad \boldsymbol{v_p} = \sqrt{\boldsymbol{2GM \frac{d_a}{d_p(d_p-d_a)}}}$

Ricordando che: $d_a = a(1+e)$; $d_p = a(1-e)$; $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{d_a+d_p}}{\boldsymbol{2}}$; $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{d_a-d_p}}{\boldsymbol{d_a+d_p}}$

le due velocità possono anche essere espresse in funzione del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita.

Quindi :

$$v_p = \sqrt{\frac{\boldsymbol{GM}}{\boldsymbol{a}}\left(\frac{\boldsymbol{1+e}}{\boldsymbol{1-e}}\right)}$$

$$v_a = \sqrt{\frac{\boldsymbol{GM}}{\boldsymbol{a}}\left(\frac{\boldsymbol{1-e}}{\boldsymbol{1+e}}\right)}$$

ALCUNE CONSIDERAZIONI DINAMICHE SULLE ORBITE

All'inizio di questi appunti abbiamo evidenziato come gli oggetti orbitanti seguano delle traiettorie che sono curve coniche e abbiamo individuato quest'ultime, catalogandole anche a seconda dell'eccentricità; in seguito abbiamo enunciato il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\boldsymbol{K + U = costante}$$

Possiamo procedere nella classificazione delle orbite a seconda del valore assunto da questa costante (l'energia meccanica). In particolare:

- Se questa costante è **negativa**, allora l'oggetto segue un'orbita chiusa (**circonferenza, ellisse**);
- Se essa è **nulla**, allora il corpo si muove su un'orbita **parabolica** (a distanza infinita la sua velocità è nulla);
- Se essa è **positiva**, allora la traiettoria è **iperbolica** (e il corpo giunge a distanza infinita con velocità – chiamata "velocità d'eccesso iperbolico" – non nulla).

VELOCITÀ DI FUGA – RAGGIO DI SCHWARZSCHILD

$$\boldsymbol{v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

A questa velocità si dà il nome di ***seconda velocità cosmica*** o ***velocità di fuga***.

Immaginiamo ora di poter comprimere un corpo celeste di massa M (quindi via via il raggio R diminuisce): la velocità di fuga di un altro corpo dalla sua superficie aumenterà al diminuire del raggio. Quando il raggio raggiungerà un valore "critico", la velocità di fuga eguaglierà quella della luce, e neanche la luce potrà allontanarsi indefinitamente dal corpo: esso è diventato un *buco nero*.

Al raggio "critico" associato a ogni massa M si dà il nome di Raggio di Schwarzschild, in onore del matematico, astronomo e astrofisico tedesco Karl Schwarzschild (1873-1916); il raggio si ricava così:

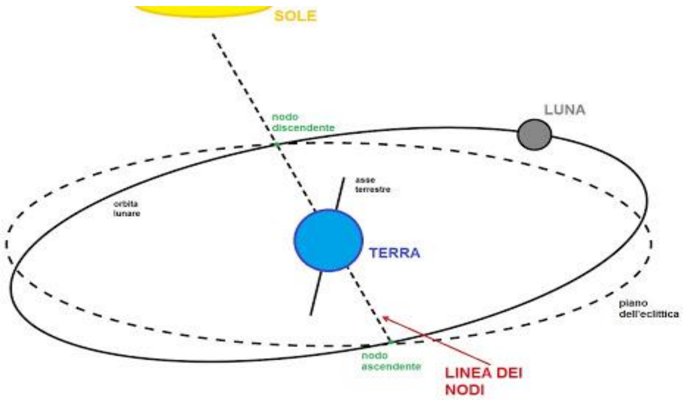
$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_s}} \quad \rightarrow \quad c^2 = \frac{2GM}{R_s} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R_s = \frac{2GM}{c^2}}$$

Dove c è la velocità della luce (c=299792458 m/s).

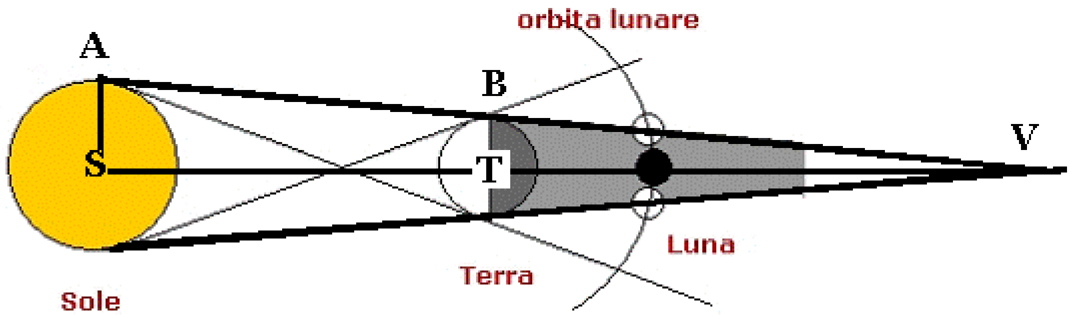
ECLISSI LUNA-SOLE

Eclisse di Luna

Una **eclisse di Luna** si verifica quando la Terra si interpone tra il nostro satellite ed il Sole, cioè quando la Luna entra nel cono d'ombra della Terra che è rivolto dalla parte opposta al Sole e per tanto l'eclisse piò avvenire solo quando la Luna è in opposizione, cioè quando è piena. Poiché la Luna si sposta da ovest verso est essa entra nel cono d'ombra della Terra dalla parte sinistra. Se l'orbita della Luna attorno alla Terra giacesse sullo stesso piano dell'orbita della Terra attorno al Sole ad ogni plenilunio avremmo una eclisse totale di Luna. Queste due orbite sono inclinate di **5°9'** e si incontrano i due punti che definiscono **i nodi**. Perché si abbia una eclisse, Sole e Luna non solo devono essere all'opposizione ma devono essere vicinissimi ai nodi. In media la distanza angolare del Sole dal nodo deve essere minore di 9°,9 per un'eclisse **parziale** e non più di 4°,6 per un'eclisse **totale**.



Calcolo lunghezza cono d'ombra della Terra



I triangoli VAS e VBT sono simili (vedi figura)

$$VS : VT = AS : BT$$

Ma

$$VS = VT + TS$$

sostituendo si trova che:

$$VT = \frac{TS \cdot BT}{AS - BT}$$

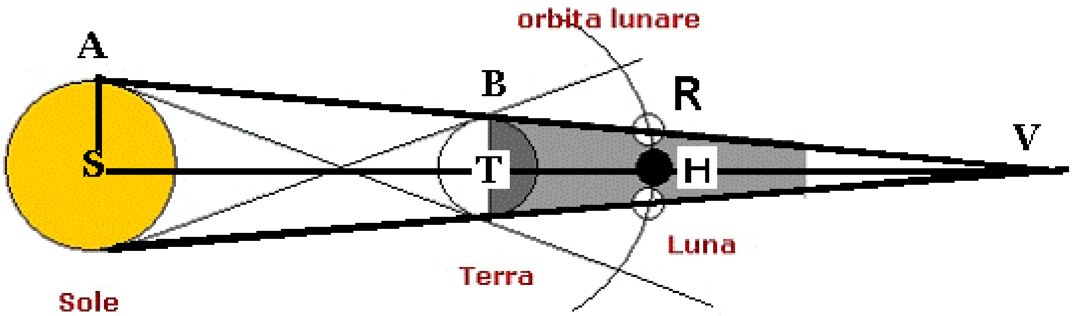
Siccome sappiamo che il raggio del Sole è circa 109,25 raggi terrestri abbiamo:

$$VT = \frac{ST \cdot BT}{109{,}25BT - BT}$$

$$VT = \frac{ST}{109{,}25 - 1}$$

La lunghezza del cono d'ombra si può calcolare dividendo la distanza media Terra-Sole per 109,25

Si può calcolare anche il semidiametro apparente visto dalla Terra dell'ombra che la Terra proietta sul piano dove si trova la Luna.



Poiché il raggio angolare della Luna è di 15'.5, perché una eclisse di Luna possa avere luogo è necessario che la distanza tra i centri dell'ombra terrestre e della Luna sia inferiore a:

41'+15',5 = 56',5

Con questo dato si può calcolare quanto è spostato il centro dell'orbita terrestre dal nodo lunare.

Dalla proporzione:

$$BT : RH = VT : HV$$

$$RH = \frac{VH \cdot BT}{VT}$$

Dato che:

$$VH = VT - TH$$

$$RH = \frac{BT\,(VT - TH)}{VT} =$$

$$= \frac{BT}{VT}\left(1 - \frac{TH}{VT}\right) =$$

Dalla formula precedente:

$$VT = \frac{ST}{108.25}$$

Sostituendo:

$$RH = \frac{BT \cdot 108.25}{ST}(1 - TH) =$$

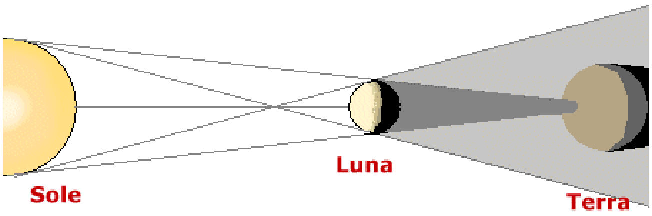
$$= \frac{R_{TERRA}}{D_{TS}} 108.25\,(1 - D_{TL})$$

Si trova che questo valore è di 10°,6. Quindi un'eclisse lunare si può verificare (anche di breve durata) solo nel caso in cui l'orbita terrestre è spostata meno di 10°,6 gradi dal nodo lunare (ad est o ad ovest).

La Terra si muove lungo l'eclittica di circa 59' al giorno. Per percorrere questa distanza impiega 10,8 giorni e la distanza doppia in 21,6 giorni, poiché una rivoluzione sinodica si compie in 29,5 giorni. Una Luna piena può verificarsi ad una distanza superiore ai 10°,6 gradi ad ovest e la successiva Luna piena ad una distanza superiore ad est e quindi nel corso di questa rivoluzione non si verificheranno eclissi. Si può verificare che in un anno non ci siano eclissi o al massimo tre: quando la prima cade poco dopo il primo gennaio, la seconda sei mesi dopo (in prossimità di giugno) e la terza a fine dicembre (dodici mesi sinodici dopo la prima, 354 giorni).

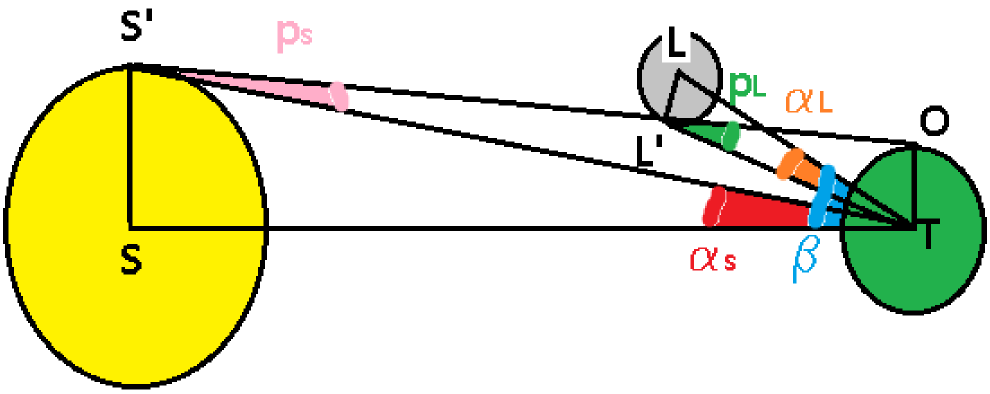
Eclisse di Sole

Un'eclissi di Sole si verifica quando la Luna, attorno alla sua congiunzione, si trova allineata tra la Terra e il Sole, molto **vicino ad uno dei nodi o esattamente in esso**. Benché di dimensioni estremamente diverse, si trovano a distanze tali da mostrare lo **stesso diametro apparente**. Il che consente alla Luna di coprire il disco del Sole.



Perché ci sia una eclisse di Sole è necessario che al momento del **novilunio** il Sole sia distante dal nodo inferiore in media 15°,5. Questo valore è più alto di quello calcolato per l'eclisse di Luna, e quindi si capisce perché le eclissi di Sole sono più frequenti. Il cono d'ombra massimo della Luna ha un valore che non supera i 270km sulla superficie della Terra, mentre la lunghezza del cono d'ombra è circa 374.000 per cui il vertice di questo cono non sempre raggiunge la Terra: in questo caso si hanno **eclissi anulari**. In località differenti della Terra, l'eclisse di Sole si verifica in tempi diversi. Il moto della Luna attorno alla Terra e la rotazione della Terra attorno al proprio asse fanno sì che l'ombra lunare si sposti da ovest verso est formando una striscia d'ombra lunga un migliaio di km e larga da 200 a 270 km. Poiché la Luna si sposta da ovest verso est l'eclisse inizia dal bordo ovest del Sole.

Condizione perché si possa verificare un'eclissi di Sole



Perché si verifichi un'eclisse di Sole è necessario che nel periodo della Luna nuova questa si trovi in prossimità di uno dei nodi della sua orbita, cioè in vicinanza dell'eclittica.

Indichiamo con S, T, L, i centri del Sole, della Terra, della Luna, che giacciono tutti su di un piano perpendicolare al piano dell'eclittica. Il verificarsi dell'eclisse dipende dalla latitudine geocentrica della Luna (nella figura l'angolo LTS (vertice in T) $= \beta$)

Dalla figura:

$$\beta = LTL' + L'TS' + STS'$$

Dalla figura si evince che:

LTL' è il raggio angolare della Luna= α_L

STS' è il raggio angolare del Sole = α_S

$$\beta = \alpha_L + L'TS' + \alpha_S$$

L' TS' = ?

Consideriamo l'angolo TL'O esterno al triangolo TL'S' :

TL'O= L'TS' + TS'L'

TL'O= L'TS' + TS'O

L'TS' = TL'O - TS'O

TL'O = $p_L = 57'2''$ (*parallasse orizzontale* della Luna)

TS'O= $p_S = 8'',8$ (parallasse orizzontale del Sole)

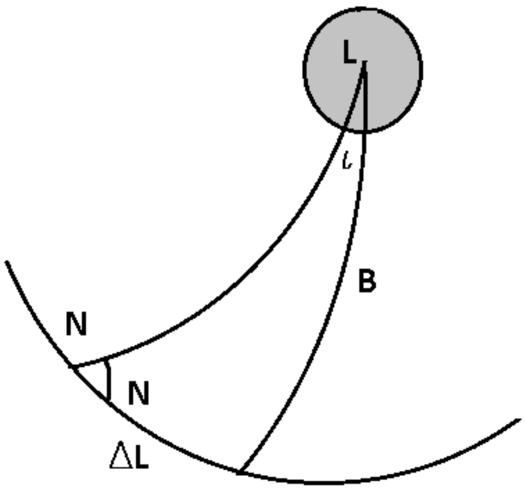
$$\beta = \alpha_L + \alpha_S + p_L - p_S$$

$$\beta = 15',5 + 16',3 + 57',2 – 8'',8$$

$$\beta = 88',46$$

Perché si verifichi una eclisse anche di breve durata è necessario che la latitudine geocentrica della Luna sia **inferiore a 88'',46.**

La **parallasse orizzontale equatoriale della Luna** è l'angolo sotto il quale, dal centro della Luna, è visibile il raggio equatoriale della Terra. La **parallasse orizzontale equatoriale del Sole** è l'angolo sotto il quale, dal centro del Sole, è visibile il raggio equatoriale della Terra.

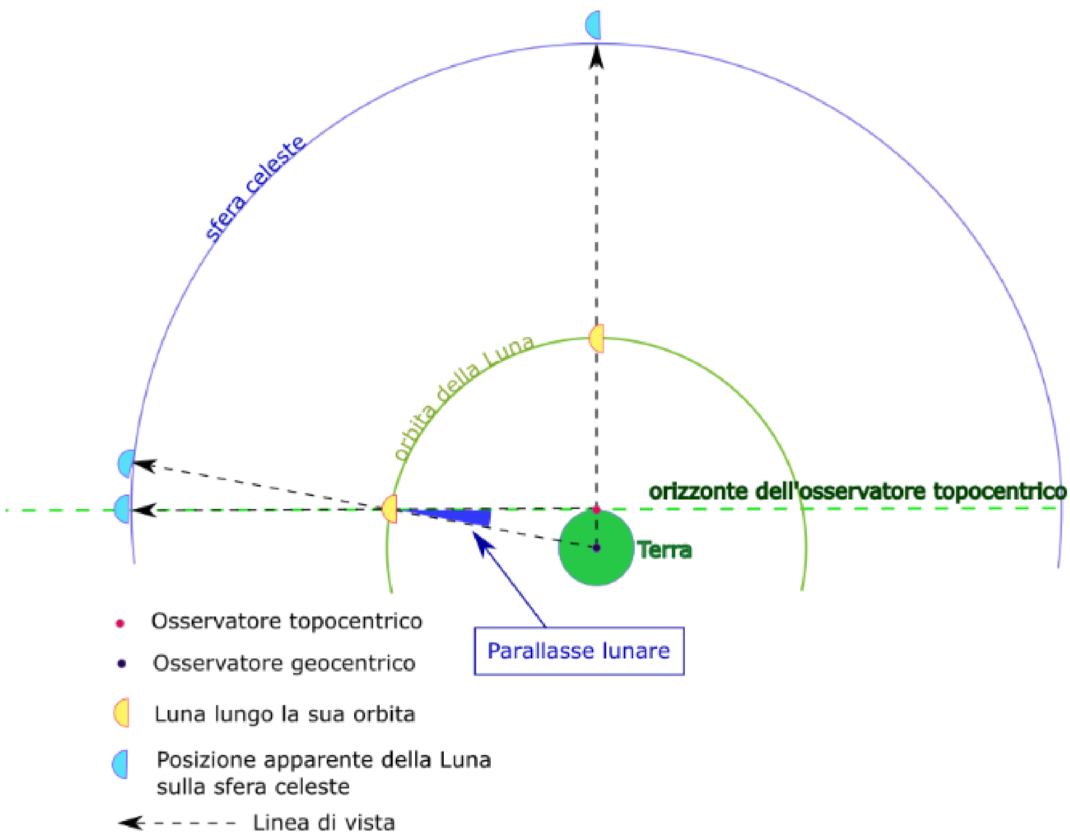


La distanza angolare del centro della Luna rispetto al nodo (longitudine) si può calcolare con la:

$$\sin\Delta\lambda = \frac{\tan\beta}{\tan i}$$

$$\Delta\lambda = 16°,5$$

Il Sole, muovendosi alla velocità di 59’ al giorno, percorre 33° gradi di eclittica in 34 giorni. Essendo il periodo sinodico di 29,5 giorni, è evidente che nel corso di questo periodo si ha una Luna nuova (ed anche due). Questo assicura che nel corso di un anno si verificano, almeno, due eclissi di Sole in vicinanza dei nodi. Se la prima si verifica ai primi di gennaio, la seconda si ha alla Luna nuova successiva, la terza e la quarta poco meno di sei mesi dopo e la quinta 354 giorni dopo la prima.



Numero totale di eclissi per anno:

Il Ciclo di Saros

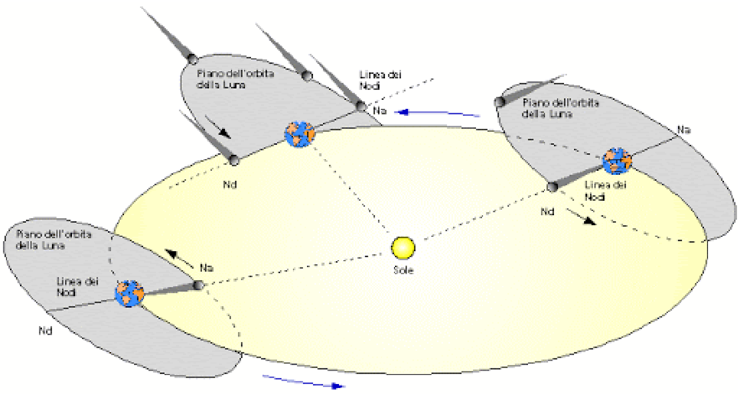
In base a quanto fin qui detto, il numero massimo di eclissi che si possono verificare in un anno è **7**:

- 2 Luna + 5 Sole
- 3 Luna + 4 Sole

e viceversa. Questa combinazione è piuttosto rara, l'evento più frequente è 2 Luna + 2 Sole. Il numero minimo costituito da due eclissi entrambe di Sole.

Fin dall'antichità era noto che le eclissi si succedevano pressoché nello stesso ordine in un periodo di circa 18 anni e 11,3 giorni. La spiegazione è alquanto semplice.

Le fasi lunari si succedono ogni 29,53 giorni (mese sindico) mente il ritorno allo stesso nodo della Luna avviene ogni 27,21 giorni. I nodi hanno un moto di retrogradazione: in un giorno percorre un angolo pari a **3'10'',64** e completa il giro in **18anni e 11,3 giorni**. Il Sole si sposta di moto diretto in media di 59'8'',33 al giorno rispetto al nodo. Il moto del Sole è di 62'19'' e quindi l'intervallo di tempo fra due passaggi consecutivi del centro del Sole per lo stesso nodo è di 346,62 giorni (anno draconico). Il **saros** è l'intervallo di tempo perché questi tre periodi tornino nella stessa successione. La natura si diverte!!!!



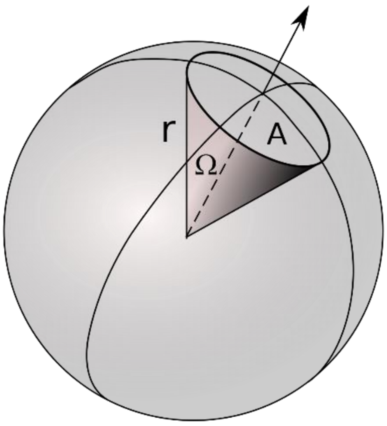
Succede che:

- 223 lunazioni (223 mesi sinodici) corrispondono a giorni 6585,19 (223 x 29,53)
- 242 mesi draconici corrispondono a giorni 6585,02
- questi giorni corrispondono a 18 anni e circa 11 giorni

Poi succede che se dividiamo questi 6585,19 per l'anno draconico troviamo circa 19.

Questi tre periodi ritornano nella stessa successione dopo circa 6585 giorni, che rappresenta il ciclo di Saros. Le condizioni in cui si producono le eclissi non saranno mai le stesse poiché, essendo 223 mesi sinodici più corti di 0,04 mesi draconici, dopo 18 anni la Luna non si troverà esattamente allo stesso posto rispetto al nodo. Il ciclo di Saros contiene 6585 giorni interi più circa 1/3 di giorni: questo comporta che le zone di visibilità delle eclissi sulla superficie terreste in 18 anni si spostano di circa 120° verso Ovest.

ANGOLO SOLIDO



Si definisce angolo solido la porzione di sfera intercettata dalle semirette che lo individuano:

$$\Omega = \frac{A}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$

$$\Omega = 4\pi$$

L'angolo solido totale di una sfera è pari a 4π. L'unità di misura è sr (steradiante) ed è un numero puro.

Per avere la misura in gradi quadrati si deve

$$moltiplicare: 4\pi \bullet \left(\frac{180°}{\pi}\right)^2 \qquad o\ dividere: \frac{4\pi}{\pi\Box^2}$$

4π sr= 41253□° -> 1□°=$3.046 \bullet 10^{-4} sterad.$

STRUMENTI OTTICI

CAMPO DELLO STRUMENTO

Il campo di uno strumento è definito dall'angolo solido sotto il quale l'oculare viene visto dal centro dell'obiettivo. Il campo corretto dalle aberrazioni ottiche di norma è $\frac{1}{2}\Box°$

APERTURA ASSOLUTA

L'apertura assoluta dipende dal diametro D dello strumento. La quantità di luce raccolta è proporzionale all'area dell'obiettivo $\cong\ D^2$

APERTURA RELATIVA

Si definisce apertura relativa il rapporto:

$$\frac{D}{f} = \frac{apertura\ assoluta\ (diametro)}{focale\ dell'obiettivo}$$

RAPPORTO FOCALE

L'inverso dell'apertura relativa $\frac{f}{D}$ definisce il rapporto focale

L'energia raccolta dall'obiettivo è distribuita sull'area dell'immagine la cui grandezza sul piano focale è data da:

$$d = f \bullet tan\alpha$$

Con α=diametro angolare dell'oggetto

$$d = f\alpha$$

Se α è espresso in radianti

POTERE RISOLUTIVO

Il potere risolutivo è la minima distanza angolare tra due sorgenti di luce che possono essere viste separate ("risolte", in termine tecnico) secondo un criterio detto di Rayleigh.

Due sorgenti puntiformi (di uguale luminosità) risultano risolte quando la loro distanza angolare:

$$\theta = \frac{1.22 \bullet \lambda}{D} = \frac{lunghezza\ d'onda}{diametro}$$

Si ottiene un risultato in radianti

In secondi d'arco, invece:

$$\theta = \frac{2.5 \bullet 10^5 \bullet \lambda}{D}$$

Con λ=lunghezza d'onda della luce=5500Å (regione di massima sensibilità dell'occhio)

Il potere risolutivo dell'occhio, assumendo la pupilla con un diametro di 3 mm, è uguale a:

$$\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D} = 1{,}22 \bullet \frac{5500 \bullet 10^{-9}m}{3 \bullet 10^{-3}m} = 2.24 \bullet 10^{-4}rad = 46"$$

Il fattore di conversione da radianti a secondi è il <u>NUMERO MAGICO</u>: 1 rad = 206265"

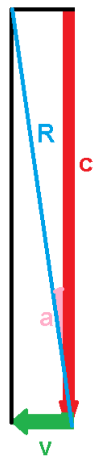
Nella determinazione del potere risolutivo interviene l'apertura dello strumento e non l'ingrandimento.

INGRANDIMENTO

L'ingrandimento dello strumento è dato dal rapporto tra la focale dell'obiettivo f e la pupilla dell'oculare f'

$$g = \frac{f}{f'}$$

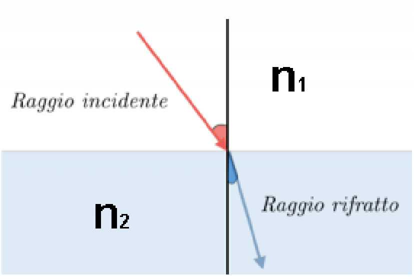
ABERRAZIONE DELLA LUCE



Quando i raggi di una stella arrivano sulla Terra, la loro direzione di provenienza appare leggermente deviata a causa della velocità orbitale del pianeta v. I vettori delle velocità (della luce e del pianeta) si combinano per dare un vettore risultante di poco inclinato dalla direzione di provenienza dei raggi.

$$a = \arctan\frac{v}{c}$$

RIFRAZIONE



Il fenomeno della rifrazione ha origine dal cambiamento di velocità delle onde luminose quando passano da un mezzo trasparente all'altro. Esiste una proporzione tra le due diverse velocità e i seni degli angoli $\theta_{incidenza}$ e $\theta_{rifrazione}$ che i raggi formano con la linea normale alla superficie nel punto colpito dal raggio. Se consideriamo gli indici di rifrazione n_1 e n_2 dei materiali, la proporzione è inversa.

$$\frac{sin\theta_{incidenza}}{sin\theta_{rifrazione}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

RIFRAZIONE ATMOSFERICA

All’entrata nell’atmosfera terrestre, i raggi luminosi provenienti da un corpo celeste che si trova a distanza zenitale z vengono rifratti (deviati verso il basso) di un angolo r. Quindi i corpi celesti si osservano in una posizione leggermente più alta del reale. In particolare, possiamo vedere oggetti che si trovano anche sotto l’orizzonte geometrico del luogo (es. Il sole al tramonto). La formula stabilisce che l’angolo di rifrazione è proporzionale alla tangente della distanza zenitale.

Questa formula **vale fino ad angoli $\boldsymbol{z \approx 70°}$**.

Oltre questo valore, fino all’orizzonte, la rifrazione aumenta fino a raggiungere il valore massimo di 35’

$$r = 58.2'' \tan(z)$$

RIASSUMENDO…

CENNI TEORICI SUI TELESCOPI

Il telescopio è uno strumento che raccoglie la luce o altre radiazioni elettromagnetiche provenienti da un oggetto lontano, la concentra in un punto (detto fuoco) e ne produce un'immagine ingrandita. Possiamo paragonare un telescopio a un "grande occhio" che sopperisce al fatto che la nostra pupilla, di dimensioni ridotte, riesce a raccogliere un quantitativo insufficiente di luce emessa da un oggetto lontano. Un telescopio è caratterizzato dalle seguenti componenti e grandezze:

- OBIETTIVO: è la parte del telescopio rivolta verso l'oggetto da osservare. Il suo diametro D prende il nome di APERTURA. Telescopi con una grande apertura sono capaci di raccogliere più luce e di fornire un'immagine a più alta risoluzione. L'obiettivo fa convergere i raggi luminosi in un punto, il *fuoco*, la cui distanza dall'obiettivo è chiamata LUNGHEZZA FOCALE.;
- OCULARE: la parte del telescopio (nel caso di telescopi ottici) che raccoglie la luce proveniente dall'obiettivo e che la trasmette poi all'occhio. Anche per l'oculare è possibile definire una LUNGHEZZA FOCALE.

Ingrandimento:

L'ingrandimento di un telescopio è dato dal rapporto fra la lunghezza focale dell'obiettivo e la lunghezza focale dell'oculare:

$$i = f_{ob}/f_{oc}$$

Rapporto focale:

Rapporto esistente tra la lunghezza focale dell'obiettivo e l'apertura stessa del telescopio:

$F = \frac{f_{ob}}{D}$ negli strumenti è specificato da una F seguita da un numero (es.: F4, F4.5, F6…)

Campo visivo:

Esso è dato dal rapporto fra il campo visivo apparente dell'oculare (l'ampiezza angolare dell'immagine fornita dall'oculare soltanto) e il numero di ingrandimenti:

$$FoV = \frac{FoV_{oc}}{i}$$

Pupilla d'uscita:

Essa è il diametro del fascio luminoso che esce dall'oculare:

$$p = \frac{D}{i}$$

Potere risolutivo:

Esso è l'angolo minimo che deve separare due oggetti affinché lo strumento li possa distinguere: è dato dal criterio di Rayleigh:

$$\vartheta(rad) = \frac{1{,}22\lambda}{D} \qquad \vartheta° = \frac{69{,}9\lambda}{D} \qquad \lambda\ lunghezza\ d'onda\ della\ luce\ osservata$$

Magnitudine limite:

È la magnitudine visuale massima che può essere osservata con uno strumento di apertura D (in cm):

$$m_{lim} = 6{,}8 + 5logD$$

Ingrandimento minimo utile:

è l'ingrandimento che fornisce una pupilla d'uscita pari al diametro della pupilla umana (6-7 mm):

$$i_{min} = D(mm)/7$$

Formula di Dawes:

Ci consente di trovare l'apertura di un telescopio che gli consenta di distinguere un oggetto che si vede sotto un angolo α:

$$D(mm) = \frac{120}{\alpha''}$$

Dimensioni dell'immagine sul piano focale:

L'immagine che si forma sul piano focale di un telescopio con lunghezza focale dell'obiettivo f relativa a un oggetto di dimensione angolare α è:

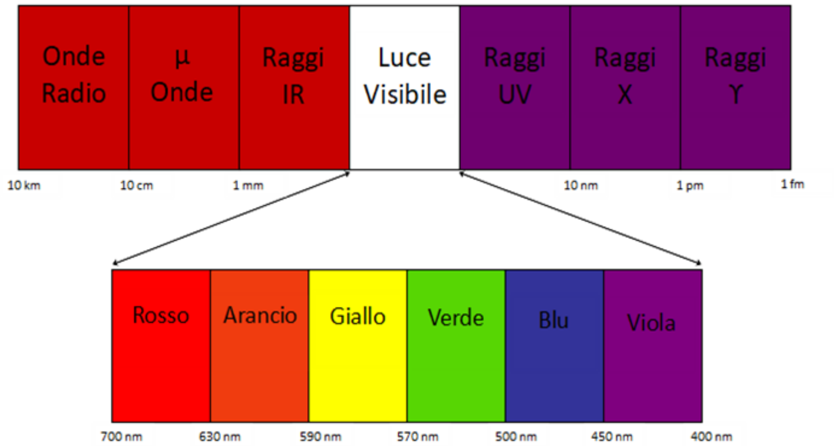
$$l = 2f\tan(\alpha/2)$$

ELEMENTI DI ASTROFISICA

Tutte le informazioni che riceviamo dalle stelle ci provengono dalla “luce” che emettono[1]. È solo attraverso l’analisi e la “decodificazione” dei messaggi contenuti in questa radiazione elettromagnetica che è la luce che noi possiamo ottenere informazioni sulle proprietà fisiche e chimiche delle stelle e delle galassie.

La radiazione elettromagnetica

Una radiazione elettromagnetica è, dal punto di vista dell’elettromagnetismo classico, un fenomeno ondulatorio dovuto alla contemporanea propagazione di perturbazioni periodiche di un campo elettrico e di un campo magnetico, oscillanti su piani tra di loro ortogonali. Le stelle emettono tipicamente radiazione di “corpo nero” e come tale irradiano energia in tutte le lunghezze d’onda secondo una distribuzione che viene chiamata spettro della radiazione elettromagnetica.



I parametri che permettono di distinguere tra loro le varie radiazioni elettromagnetiche sono:

1) In realtà, un altro “canale” di trasmissione delle informazioni per la comprensione dei fenomeni celesti si è aperto grazie ai risultati positivi ottenuti dagli interferometri per onde gravitazionali LIGO e VIRGO; in particolare, gli interferometri menzionati, il 17 agosto 2017, hanno rilevato un segnale di onda gravitazionale (rilevazione annunciata poi ufficialmente il 16 ottobre dello stesso anno), mentre altri telescopi in orbita e a terra sono riusciti a individuare per la prima volta la sua controparte elettromagnetica; l’evento che ha generato il segnale è stato la collisione di due stelle di neutroni (che ha portato a un’esplosione nota col termine di *kilonova*) nella galassia NGC 4993: esso ha segnato la nascita della cosiddetta “astronomia *multi-messaggero*, per il fatto che è stato possibile confrontare due “linguaggi” diversi, permettendo così di ampliare le frontiere della conoscenza di questi fenomeni “estremi”.

Parametri di un'onda

Come tutti i fenomeni ondulatori la radiazione elettromagnetica è caratterizzata da questi parametri:

- ***Lunghezza d'onda*** λ:
la lunghezza d'onda tra due creste o tra due ventri. Si misura in metri e/o con i suoi sottomultipli.

- ***Periodo T:***
l'intervallo di tempo, misurato in secondi, in cui avviene un'oscillazione completa, ovvero l'intervallo di tempo impiegato dall'onda per ritornare nella medesima posizione (per esempio, il tempo intercorso tra due creste o tra due ventri successivi.

- ***Frequenza*** υ***:*** è il numero di creste che si susseguono nello stesso posto nell'unità di tempo; è l'inverso del periodo:

$$\upsilon = \frac{1}{T}$$

Frequenza che si misura in Hertz (Hz) pari ad un'oscillazione al secondo.

$$Hz = 1s^{-1}$$

- ***Ampiezza A:*** rappresenta la variazione massima dell'onda. L'ampiezza di un'onda periodica è l'altezza di una sua cresta.

- ***Intensità di un'onda:*** è proporzionale al quadrato dell'ampiezza

- ***Potenza:*** ogni onda porta con sé un'energia e quindi una potenza. Tale potenza decresce con il quadrato della distanza dalla sorgente.

La **lunghezza d'onda λ e la frequenza v** di una radiazione elettromagnetica sono grandezze legate tra loro dalla relazione:

$$\lambda \cdot \upsilon = c$$

(c –la velocità della luce- nel vuoto ha un valore di 299 792 458 m/s.) Questa formula ci dice che le due grandezze sono **inversamente proporzionali**.

La radiazione elettromagnetica può essere interpretata come un insieme di “pacchetti” di energia a cui si dà il nome di fotoni: grazie a questi “pacchetti energetici” la luce può interagire con la materia a livello microscopico: per esempio può eccitare un elettrone in un atomo cedendo a esso la sua energia. Continuando il paragone, possiamo immaginare che più la radiazione è intensa, più i pacchetti sono numerosi; più la radiazione cresce di frequenza, più essi sono “capienti”. Quest’ultima caratteristica è descritta dalla ***Legge di Planck*,** che lega l’energia del fotone alla sua frequenza:

$$E = h \cdot \nu$$

(dove h è la costante di Planck)

$$E = h\frac{c}{\lambda}$$

***EQUIVALENZA MASSA- ENERGIA*:** Tra l’energia e la massa esiste una fondamentale relazione, scoperta dal fisico Albert Einstein, espressa dall’equazione

$$E = mc^2$$

dove *c* è la velocità della luce (pari a $3 \cdot 10^8$ m/s). L'equazione di Einstein implica che energia e massa sono equivalenti: la massa può essere trasformata in energia e l'energia può essere trasformata in massa. Ciò comporta il **principio di conservazione della massa-energia:** non vi è conservazione della massa o dell'energia considerate separatamente ma vi è conservazione dell'insieme delle due: a una diminuzione della massa pari a Δm deve corrispondere un aumento dell'energia pari a $\Delta m \cdot c^2$. Poiché il prodotto $m \cdot c^2$ è un numero molto grande, la trasformazione di una massa anche molto piccola di materia determina la produzione di una quantità enorme di energia, come avviene, per esempio, nelle *reazioni di fissione e di fusione nucleari (*queste ultime avvengono nel nucleo delle stelle: si veda, per una maggiore comprensione, il problema 2 della sezione *Miscellanea*).

Grandezze fotometriche

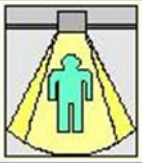
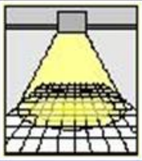
Grandezze fotometriche		Simbolo e unità di misura
Flusso luminoso: quantità di luce emessa da una sorgente luminosa nell'unità di tempo		Φ *lumen (lm)*
Intensità luminosa: quantità di flusso luminoso emesso in una determinata direzione e nell'unità di angolo solido, misurato in steradianti (*sr*), che la contiene		$I = \frac{\Phi}{\omega}$ *candela (cd)* $cd = lm / sr$
Illuminamento: quantità di flusso luminoso per unità di superficie		$E = \frac{\Phi}{S}$ *lux(lx)* $lx = lm / m^2$
Luminanza: intensità luminosa emessa in una determinata direzione da una sorgente luminosa o, per riflessione, da una superficie illuminata riferita all'unità di superficie normale a tale direzione		$L = \frac{I}{S}$ *candela / m^2* (cd / m^2)

Immagine dal web (fonte: VOLTIMUM)

Flusso luminoso:

Quantità di energia luminosa emessa da una determinata sorgente nell'unità di tempo. Lo indichiamo con la lettera Φ. L'unità di misura nel SI è il lumen (lm); 1 watt = 683 lumen

Illuminamento:

Rapporto tra il flusso luminoso ricevuto da una superficie e l'area della superficie stessa (E= $\frac{\varphi}{S}$)
L'unità di misura nel SI è il lux (lx), ovvero il lumen al metro quadrato (lm/m^2).

Nota

Dalla definizione di illuminamento si ricavano due importanti corollari di natura geometrica che risultano molto utili per comprendere la distribuzione della luce nello spazio:

1) Per una sorgente puntiforme la diminuzione del livello di illuminamento su di una superficie varia in relazione al quadrato della distanza dalla fonte: raddoppiando la distanza dalla fonte il livello di illuminamento sulla superficie diviene quindi ¼;
2) Il livello d'illuminamento su di una superficie è massimo quando i raggi luminosi giungono perpendicolari ad essa e diminuisce proporzionalmente al loro angolo d'incidenza secondo la relazione: E = E_n , cosi E_nè l' illuminamento normale, i l'angolo d'incidenza tra raggi luminosi e la normale alla superficie .

Intensità luminosa:

Flusso luminoso emesso all'interno dell'angolo solido unitario in una direzione data.

$$I = E = \frac{\varphi}{\omega}$$

ed è una grandezza vettoriale. L'unità di misura nel SI è la candela (cd)

Luminanza:

La luminanza è il rapporto tra l'intensità luminosa di una sorgente nella direzione di un osservatore e la superficie emittente apparente così come viene vista dall'osservatore stesso

$$L = \frac{I}{S.cos\alpha}$$

α è $l'angolo$ compreso tra la direzione di osservazione e l'asse perpendicolare alla superficie emittente. La luminanza si esprime in cd/m^2.

Parametri fisici delle stelle

Le grandezze fondamentali che permettono di caratterizzare le stelle sono:

- ⇒ la distanza (d)
- ⇒ lo spettro della radiazione e.m. emessa
- ⇒ la luminosità totale o bolometrica (L)
- ⇒ la temperatura superficiale (T)
- ⇒ il raggio (R)
- ⇒ la massa (M)

Le stelle possono essere approssimate a **corpi neri**, in quanto le uniche onde elettromagnetiche che non vengono assorbite dalla loro superficie sono quelle aventi una lunghezza d'onda di dimensione pari o maggiore del diametro della stella stessa. Per studiare le proprietà dell'emissione continua delle stelle è utile introdurre il concetto di corpo nero.

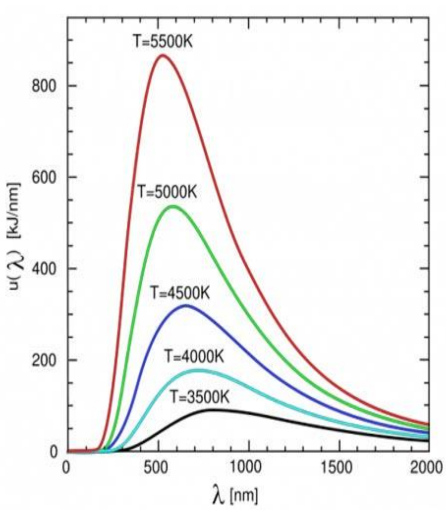
Corpo nero

Il corpo nero è un corpo che assorbe tutta la radiazione che gli cade sopra. Appare perfettamente nero perché **assorbe il 100% della radiazione** che incide su di esso e **non ne riflette nessuna**. Il corpo nero è un **oggetto teorico**: nessun materiale assorbe tutta la radiazione incidente.

Il corpo nero ha uno spettro di emissione caratteristico che dipende solo da un parametro: la **temperatura**.

Lo studio della radiazione emessa dal corpo nero ha portato alla formulazione delle seguenti leggi:

- La legge (di spostamento) di Wien: la frequenza massima, ν_{max} di uno spettro di corpo nero a temperatura T cresce linearmente con T



$\nu_{max} \propto$ T, il che comporta una proporzionalità inversa fra la temperatura assoluta e la lunghezza d'onda

$$\lambda_{max}\, T = b$$

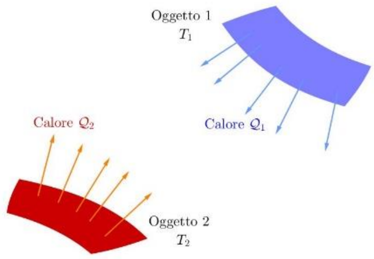
b = $2{,}9.\,10^{-3}$ m·K

Per cui si ha:

$$\lambda_{max}\,\mathrm{T} = 2{,}9.\,10^{-3}\ \mathrm{m{\cdot}K}$$

- Legge di Stefan-Boltzmann: l'energia erogata per unità di superficie e per unità di tempo è proporzionale alla quarta potenza della temperatura T:

$$I = \sigma T^4$$



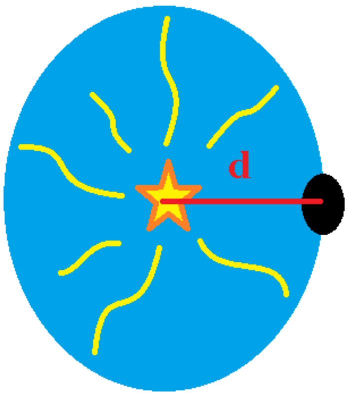
Applicazioni in astrofisica

Stefan-Boltzmann: per una stella, che approssimiamo ad una sfera di raggio R e superficie S= $4\pi R^2$ la legge di Stefan-Boltzmann diventa:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Poiché le stelle non sono dei corpi neri perfetti, la temperatura è la temperatura efficace, quella che la superficie della stella avrebbe se si comportasse da corpo nero.

Flusso e Luminosità

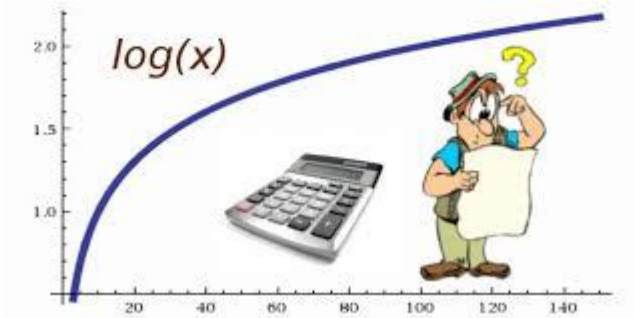


$$\varphi = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Il flusso di energia è dato dal rapporto fra la l’energia emessa dalla stella nell’unità di tempo e la superficie della sfera di raggio pari alla distanza d dalla stella. Quindi si vede che il flusso misurato sulla superficie terrestre dipende dalla luminosità della stella e dalla sua distanza.

I LOGARITMI

Il termine _logaritmo_ è composto da due parole greche: ***logos*** = "ragione" e ***arithmos*** = "numero". "**Numero di ragioni**": questa definizione appare naturale pensando alla ragione delle progressioni aritmetiche e geometriche che sono alla base della costruzione di Nepero.



La storia di come nasce questo procedimento di calcolo è molto interessante: qui ci piace evidenziare che la motivazione alla base della scoperta dei logaritmi ed anche il motivo del loro successo fu la ricerca di efficienti strumenti di calcolo in grado di alleggerire il pesante fardello di cui erano gravati gli astronomi del tempo i quali, per poter predire il corso dei pianeti, si dovevano confrontare con grandi difficoltà di calcolo. Basta pensare al **calcolo dell'orbita del pianeta Marte del povero Keplero**. Quando **Nepero** pubblicò il suo lavoro sui logaritmi gli astronomi dissero che aveva regalato loro *metà della vita*! I logaritmi rendono infatti **possibile trasformare prodotti in somme, quozienti in differenze, elevamenti a potenza in prodotti e calcoli di radici in quozienti**: le operazioni vengono molto semplificate.

Che cosa è un logaritmo?

Generalmente si risponde che è una **operazione inversa**.

Partiamo da una operazione conosciuta: l'*estrazione di radice quadrata* di un numero:

$$\sqrt{25} = 5$$

La radice quadrata di 25 è quel numero che elevato a due restituisce 25, cioè il numero 5: infatti $5^2 = 25$. Concludiamo dicendo che la **radice è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza**.

Il concetto di logaritmo è abbastanza simile a quello della radice quadrata solo che non ci riporta al numero di partenza ***ma al suo esponente***.

Introduciamo la scrittura

$$\log_5 25 = 2$$

questa la scriviamo

$$5^2 = 25$$

Definiamo logaritmo di un numero b (***argomento*** del logaritmo) quel numero a cui bisogna ***elevare*** la ***base*** per ottenere il **numero** b. In notazione matematica:

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

Anche il **logaritmo è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza**!

$$\log_2 8 = x$$

la domanda è "**qual è l'esponente che devo dare alla base (2) per ottener il numero (8)?"**

Scriviamo, applicando la definizione:

$$2^x = 8$$

e siccome

$$8 = 2^3$$

Allora*

$$2^x = 2^3$$

e perciò

$$x=3$$

(*se le **basi sono uguali, l'uguaglianza sarà verificata se saranno uguali anche gli esponenti**)

È abbastanza evidente che i logaritmi e le potenze rappresentano due modalità di scrittura diversa ma rappresentano la stessa cosa.

Osservazione importante: la base dei logaritmi ed il numero devono essere **numeri reali positivi; in più, la base deve anche essere diversa da 1**:

$$b > 0$$

$$0 < a < 1$$

$$a > 1$$

Quindi, per esempio, non esistono $\log_2(-5)$, $\log_1 12$, $ecc.$

Proprietà dei logaritmi

Il logaritmo del prodotto di 2 o più numeri positivi corrisponde alla somma dei logaritmi dei singoli fattori:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

(Nota: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$)

Il logaritmo del quoziente di 2 numeri positivi è eguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

(Nota: $a^x : a^y = a^{x-y}$)

Il logaritmo della potenza a esponente reale di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo del numero:

$$\log_a b^n = n \cdot log_a b$$

Una estensione di questa ultima proprietà è

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \log_a b^{\frac{m}{n}}$$

(che possiamo scrivere come $\frac{m}{n} \log_a b$)

A volte per calcolare un logaritmo può risultare utile effettuare un **cambiamento di base**.

Il ***log_a b*** , la cui base è *a*, può essere scritto utilizzando un'altra base, per esempio il numero *c*:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Ricorda inoltre che:

$$\log_a 1 = 0 \quad (infatti\ a^0 = 1) \quad e \qquad \log_a a = 1 \quad (infatti\ a^1 = a)$$

Se la **base** di un logaritmo è il **Numero di Nepero** (chiamato meno frequentemente anche Numero di Eulero e indicato con ***e*** = 2,718281828459…) allora il logaritmo prende il nome di ***logaritmo naturale*** e si indica con ***ln***.

Quindi se vediamo $ln5$, niente paura! Si tratta di $\log_e 5$

Se la **base** di un logaritmo è **10**, il logaritmo prende il nome di ***logaritmo decimale*** e la base generalmente si **omette**; questo tipo di logaritmo è il più usato in astrofisica.

Quindi se vediamo $log7$, ciò vuol dire $\log_{10} 7$

I logaritmi sono utilizzati nella vita di tutti i giorni: ad esempio il gommista quando misura la pressione di una gomma utilizza uno strumento con una scala non lineare ma logaritmica; le scale sulla macchina fotografica sono logaritmiche; i nostri organi di senso sono "logaritmici". Questo ci permette di percepire un intervallo di informazioni molto più esteso di quello che avremmo se i nostri sensi fossero lineari. Pogson, quando capì che il nostro occhio percepisce una differenza di una magnitudine (▶per le *magnitudini* consulta le pagine successive del Bignamino) tra due stelle quando il rapporto tra le loro luminosità è uguale a 2,5 e che questo conserva la classificazione di Ipparco, formulò la sua formula in funzione del logaritmo del rapporto delle loro luminosità.

Magnitudine delle stelle

Quando si guarda il cielo si vede subito che le stelle ci appaiono più o meno brillanti (o luminose), ovvero sembrano avere diversa **intensità luminosa**. Gli astronomi descrivono la luminosità stellare osservata in termini di **magnitudine apparente m**

Nel II secolo a.C. Ipparco di Nicea, utilizzando l'unico strumento a sua disposizione (l'occhio umano), introdusse una classificazione delle stelle in **6 classi** di luminosità che chiamò **MAGNITUDINI**.

La scala scelta dai Ipparco prevedeva che le stelle più luminose venissero collocate nella prima classe, quelle un po' meno luminose nella seconda e, giù giù, fino a quelle appena visibili a occhio nudo, collocate nella sesta classe. Con l'osservazione del cielo attraverso gli strumenti si pose il problema di estendere la scala delle grandezze anche alle stelle non visibili ad occhio nudo.

Un grossissimo contributo venne dallo studio della fisiologia dell'occhio, strumento sul quale erano state fatte le prime classificazioni. La risposta dell'occhio umano agli stimoli luminosi non è di tipo lineare, la reazione alla luce de reagisce alla sensazione della luce in modo **logaritmico**.

Pogson è riuscito a dare una formulazione matematica alla scala delle magnitudini individuata da Ipparco. Pogson ipotizzò che il **rapporto fra le intensità luminose di una stella di prima e di sesta grandezza era pari a 100**.

Se I_1 e l'intensità luminosa di una stella di magnitudine m_1 ed I_2 l'intensità di una stella di magnitudine m_2 se m_1 - m_2 = -5 ed il rapporto $\frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}_2}$= 100

$$\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2 = K \log \frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}_2}$$

$$-5=K2$$

$$K= -2{,}5$$

$$\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2 = -2.5 \log \frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}_2}$$

L'equazione di Pogson spiega il perché la magnitudine decresce quando l'intensità luminosa cresce.

Quando si parla di intensità luminosa di una stella in realtà ci si riferisce al flusso di energia, φ , che abbiamo visto essere legato alla luminosità dalla $\varphi = \frac{L}{4\pi d^2}$

Se nella formula di Pogson m_1 - m_2= -2.5 .log $\frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}_2}$ sostituiamo alle intensità luminose il flusso si ottiene (a parità di luminosità):

$$\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2 = -5 \log \frac{\mathrm{d}_2}{\mathrm{d}_1}$$

La magnitudine apparente di una stella dipende dalla distanza.

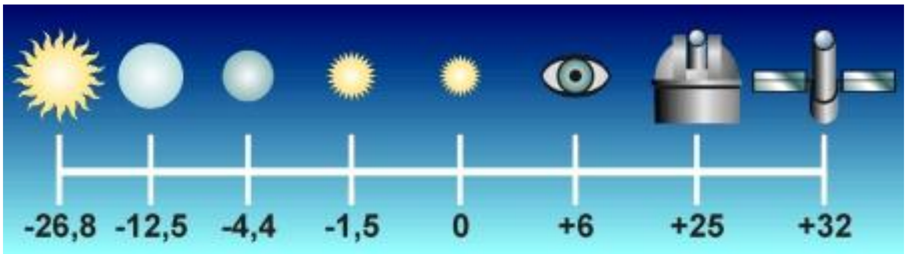
E se la stella apparentemente più debole fosse in realtà più brillante ma più lontana?
Per rispondere a questa domanda è stata introdotta la scala delle magnitudini assolute indipendente dalla distanza. Per costruire questa scala è stata presa una distanza di riferimento pari a 10pc. Quale sarà la magnitudine di una stella di cui si conosce la distanza e la magnitudine apparente se viene posta alla distanza di 10pc?

$$M - m = -5 \log \frac{d}{10pc}$$

$$M - m = 5 - 5\log d$$

Questa ultima viene anche indicata come: **modulo di distanza**. Questa scala consente di poter confrontare la luminosità intrinseca delle stelle.

M =magnitudine assoluta (stella alla distanza di 10pc)
m =magnitudine apparente
d = distanza della stella in pc



Magnitudine apparente di alcuni oggetti celesti: da sinistra verso destra, Sole, Luna piena, Venere, Sirio, Vega, Magnitudine limite dell'occhio, Magnitudine limite di un telescopio, magnitudine limite dell'Hubble

Se vogliamo calcolare la **magnitudine complessiva** di due o più sorgenti luminose, è errato ritenere di poter sommare le magnitudini! Infatti **possiamo sommare i flussi, ma le magnitudini dipendono da essi in relazione logaritmica**! La relazione che ci permette di determinare la cosiddetta *magnitudine integrata* (ossia la magnitudine complessiva, "totale") di n oggetti di magnitudine $m_1, m_2, \ldots, m_n$ è la seguente:

$$m_{int} = -2{,}5\log\left(10^{-0{,}4m_1} + 10^{-0{,}4m_2} + \cdots + 10^{-0.4m_n}\right)$$

Se invece vogliamo calcolare la **magnitudine superficiale** di un oggetto esteso di superficie angolare S (misurata in $arcmin^2$ o $arcsec^2$), ossia la magnitudine di un quadratino di superficie di lato uguale a 1 $arcsec^2$ o 1 $arcmin^2$, allora applichiamo la seguente formula:

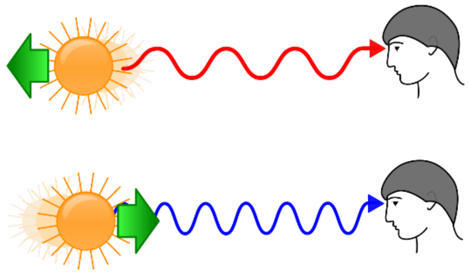
$$m_{Sup} = m_{int} + 2{,}5\log(S)$$

Se S è misurata in $arcmin^2$, la m_{sup} è espressa in $mag/arcmin^2$. Se S è misurata in $arcsec^2$, m_{sup} è espressa in $mag/arcsec^2$.

Redshift (spostamento verso il rosso)

Su grandi scale, le galassie si stanno allontanando con velocità proporzionale alla distanza: tutte le galassie si stanno allontanando tra di loro tra loro. Lo stesso **spazio-tempo si sta espandendo e sta portando le galassie con sé**.

NOTA: Il redshift cosmologico non è dovuto all'effetto Doppler, non è dovuto ai moti relativi delle galassie. Le cause e le grandezze fisiche coinvolte sono completamente diverse.



Il **redshift cosmologico** è lo spostamento relativo in frequenza di un'onda elettromagnetica dovuto all'espansione dell'universo. Si spiega ipotizzando che le lunghezze d'onda varino allo stesso modo delle distanze per effetto dell'espansione dell'universo. La lunghezza d'onda è proporzionale al fattore di scala dell'universo.

La cosmologia moderna nasce con la **legge di Hubble**

$$v=Hd$$

che lega in modo proporzionale la velocità *v* di allontanamento delle galassie alla loro distanza *d* (*H* è la costante di Hubble): le **galassie più distanti si allontanano più velocemente**. Questa legge deriva da osservazioni che mostravano che tutte le righe spettrali delle galassie sono spostate verso il rosso (redshift) e che tale effetto è proporzionale alla luminosità apparente delle galassie, legata alla loro distanza. Il **redshift** misura quindi la velocità di allontanamento di una galassia ed è definito come segue:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{teor}}{\lambda_{teor}}$$

La **legge di Hubble** ci dice che la velocità di allontanamento delle galassie è proporzionale alla loro distanza:

$$v = Hd$$

H è la costante di Hubble, il cui valore attualmente stimato è attorno a H= $2{,}176 \cdot 10^{-18}$ Hz (67,15 km/Mpc s); d è la distanza della galassia

Maggiore è la distanza della galassia, tanto maggiore sarà il redshift:

$$z=\frac{Hd}{c}$$

Per z$\ll$ 1 vale l'approssimazione del redshift come effetto Doppler ($z \approx \frac{v}{c}$) e quindi z è direttamente proporzionale alla velocità di allontanamento delle galassie.

- Redshift relativistico

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

- Redshift gravitazionale

La relatività generale prevede che la luce che si muove attraverso campi gravitazionali molto intensi sperimenterà uno spostamento verso il rosso o verso il blu.

Il redshift gravitazionale (chiamato anche **spostamento di Einstein**) è dovuto dal fatto che un fotone, quando emerge da un campo gravitazione, perde energia e quindi presenta uno spostamento verso il rosso che dipende dall'intensità del campo gravitazionale misurata nel punto in cui si trova il fotone

$$z = \frac{GM}{rc^2}$$

Questa $se\ r \gg r_s$

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

(raggio di Schwarzschild)

(M massa della stella, r raggio della stella)

La formula generale è:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - r_s}} - 1$$

PROBLEMI ED ESERCIZI

- **SISTEMI DI RIFERIMENTO E COORDINATE ASTRONOMICHE:**

1. Quando la stella Rigel (δ= -8° 13') passa al meridiano di Roma (ϕ=41°55') a quale altezza si trova?

   Soluzione: Quando la stella Rigel passa al meridiano di Roma essa raggiunge la posizione di culminazione superiore in corrispondenza del punto cardinale Sud. Dunque la sua altezza sull'orizzonte è pari all'altezza dell'Equatore celeste alla latitudine di Roma (90°-ϕ) sommata alla declinazione dell'astro. Dunque h_{Rigel}=90°-ϕ+δ=90°-41°55'-8°13'=39°52'.

2. A quale latitudine comincia a essere visibile la stella Canopo (δ=-52°40') appena all'orizzonte?

   Soluzione: Affinché la stella Canopo sia appena visibile all'orizzonte per un osservatore posto alla latitudine ϕ, è necessario che l'Equatore celeste abbia un'altezza sull'orizzonte pari al valore assoluto della sua declinazione. Quindi è necessario che 90°-ϕ=|δ| e cioè ϕ=90°-|δ|=90°-52°40'=37°20'.
   [In realtà bisogna tenere conto dell'effetto della rifrazione atmosferica che "alza le stelle" o equivalentemente "abbassa l'orizzonte" di un angolo di 35'. Quindi in realtà Canopo si può osservare anche a una latitudine leggermente più settentrionale pari a 37°20'+0°35'=37°55' circa].

3. Quale curva descrive l'ombra di uno stilo verticale posto al polo nord il 21 giugno? Qual è il rapporto fra la lunghezza l dell'ombra e l'altezza h dello stilo?

   Soluzione: Il 21 giugno il Sole ha declinazione massima, pari al valore dell'obliquità dell'eclittica, quindi circa 23°27'. Dal momento che al polo nord l'orizzonte coincide con l'Equatore celeste e i paralleli celesti si trovano quindi su piani paralleli all'orizzonte, la rotazione diurna non contribuirà a far tramontare il Sole, che descriverà una circonferenza nel cielo; pertanto la curva descritta dallo stilo verticale è una circonferenza. Il rapporto l/h è il reciproco della tangente dell'altezza del sole, pari a 23°27'

   $$\frac{l}{h} = \frac{1}{tan23°27'}=2,3.$$

4. **(PROBLEMA GARA INTERNAZIONALE 2002)** I Cinesi, nel 1100 a.C., avevano trovato che l'altezza del Sole a mezzodì era 79°7' nel solstizio estivo e 31°19' in quello

invernale. A quale latitudine hanno fatto l'osservazione e qual era allora l'obliquità dell'Eclittica?

Soluzione: La media aritmetica dei valori delle due culminazioni del sole a mezzodì al solstizio estivo ed invernale è pari all'altezza dell'Equatore celeste. Quindi:

$$90° - \varphi = \frac{h_{estate} + h_{inverno}}{2} \rightarrow \varphi = 90° - \frac{h_{estate} + h_{inverno}}{2} = 34°47'$$

L'obliquità dell'eclittica è la differenza fra l'altezza massima del sole e l'altezza dell'Equatore celeste:

$$\varepsilon = h_{estate} - (90° - \varphi) = 79°7' - 90° + 34°47' = 23°54'.$$

[In generale, l'obliquità dell'eclittica varia da 21°55' a 24°20', con un periodo di circa 40000 anni]

- **I MOTI DELLA TERRA E LA MISURA DEL TEMPO:**

5. In quale istante di tempo siderale la stella Castore (α=7h 33m 31s ; δ=+31°55'35") è alla culminazione inferiore?

   Soluzione: Alla culminazione inferiore la stella Castore ha un angolo orario pari a 12h. Il tempo siderale, ossia l'angolo orario del punto gamma, è uguale alla somma di angolo orario e ascensione retta di una generica stella; in questo caso
   TS=α+H=7h 33m 31s + 12h= 19h 33m 31s.

6. Se in un dato giorno una stella passa al meridiano inferiore alle 21, a quale ora (all'incirca) vi passerà un mese dopo?

   Soluzione: L'ora a cui si riferisce il problema è, per esempio, quella indicata da un normale orologio, quindi è un tempo solare medio e non siderale. Siccome nel corso di un mese la stella non cambia la sua posizione rispetto al punto gamma, se il problema avesse chiesto l'ora *siderale* della successiva culminazione inferiore la risposta sarebbe stata comunque "alle 21"; siccome però il problema si riferisce a un tempo solare medio, dobbiamo tenere conto della differenza tra giorno solare e giorno siderale: quest'ultimo è più corto del primo di un valore pari a circa 4 minuti (più esattamente 3min 56s). Siccome un mese contiene mediamente 30 giorni, la stella anticiperà la sua culminazione di circa 4min*30=120min=2h e quindi culminerà all'incirca alle 19.

7. Una città A è posta alla longitudine 43°12' E di GW (Greenwich). Quando in A l'orologio segna le 20h35m siderali, in un'altra città B l'orologio segna le 23h12m siderali. Qual è la longitudine di B?

   Soluzione: La differenza dei due tempi siderali che l'orologio segna in A e in B è uguale alla differenza delle longitudini dei due luoghi. Quindi:

$$\Delta\lambda = \Delta TS \;\rightarrow\; \lambda_B - \lambda_A = TS_B - TS_A \rightarrow \lambda_B = TS_B - TS_A + \lambda_A(espressa\ in\ ore!)$$
$$= 23h12m - 20h35m + 2h53m = 5h30m$$
$$= (trasformo\ in\ gradi) = 82°30'$$

8. Quanto tempo è necessario affinché il punto gamma passi da un segno zodiacale a un altro?

   Soluzione: Il punto gamma non è fisso nel cielo, bensì, per via di uno dei moti millenari della Terra, il moto di precessione, esso si sposta di circa 50” all’anno lungo l’Eclittica. Dal momento che i segni zodiacali sono dodici, in media ognuno di essi occupa un settore lungo l’Eclittica pari a 360/12=30°=108000”. Ne discende che il tempo necessario affinché il punto gamma copra questa distanza angolare risulta pari a t=(108000”/50”)anni=2160 anni circa.

9. La Terra impiega circa 23 ore e 56 minuti a compiere una rotazione completa attorno al proprio asse. Con quale velocità tangenziale si muove un punto all’equatore per effetto del moto di rotazione della Terra? Quanto vale l’accelerazione centripeta che agisce su questo punto? Quale forza centripeta agisce su un corpo di massa 1,3 kg all’equatore?

   Soluzione: Il problema, incentrato sul moto di rotazione terrestre (il moto dei punti della Terra attorno all’asse terrestre) è un semplice esercizio di cinematica. Conoscendo il periodo e la lunghezza della circonferenza equatoriale (poiché è noto che il raggio della Terra ha un valore di 6378 km), è possibile determinare la velocità di rotazione all’equatore: il moto è circolare uniforme:
$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\tau \cdot 6378km}{23{,}93h} = 1674\frac{km}{h}$$
   L’accelerazione centripeta vale:
$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(1674 \div 3{,}6)^2}{6378000} = 33{,}9 \cdot 10^{-3}\frac{m}{s^2}$$
   Per la seconda legge della dinamica, la forza centripeta su un corpo di massa m allora vale:
$$F = ma = 1{,}3 \cdot 33{,}9 \cdot 10^{-3} = 44{,}1 \cdot 10^{-3}N$$

- **IL CIELO VISTO DALLA TERRA E LA LUNA:**

10. Due stelle equatoriali hanno parallassi 0”,022 e 0”,034; esse hanno AR 12h13m e 13h12m rispettivamente. Quant’è in parsec la loro reciproca distanza?

    Soluzione: L’angolo fra la direzione con cui si proietta in cielo la prima stella e la direzione della seconda stella è pari alla differenza delle ascensioni rette: le stelle sono infatti equatoriali, cioè hanno declinazione nulla: ΔAR=13h12m-

12h13m=(trasformando in gradi)=14°,75. La loro distanza dall'osservatore è, in parsec, pari al reciproco della parallasse:
d1=(1/P1)=1/0,022=45,5pc; d2=(1/P2)=1/0,034=29,4pc.
Il problema chiede in sostanza di calcolare un lato di un triangolo con vertici nell'osservatore e nelle due stelle (in particolare il lato con estremi nelle due stelle) noti l'angolo opposto a tale lato e gli altri due lati: possiamo quindi usare il Teorema di Carnot (o teorema del coseno):

$$x = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos(\Delta AR)} = 18{,}6\,pc$$

11. Sapendo che il periodo siderale di rotazione del Sole all'Equatore è di 25 giorni, trovare il periodo di rivoluzione sinodica, cioè quello che appare visto dalla Terra.

    Soluzione: Prendiamo un punto sull'Equatore del Sole: esso si muove con un periodo siderale (cioè riferito a una stella lontana) pari, come indicato dalla traccia, a 25 giorni. Il problema è del tutto analogo al calcolo del tempo sinodico di un pianeta interno visto dalla Terra noti i periodi di entrambi i corpi.

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{sole}} - \frac{1}{T_{terra}} \rightarrow S = \frac{T_{terra}T_{sole}}{T_{terra} - T_{sole}} = \frac{365{,}25 \cdot 25}{365{,}25 - 25}d = \frac{9131{,}25}{340{,}25}d = 26{,}84d$$

12. A quale distanza da uno schermo deve essere posta una sfera di raggio R affinché, illuminata dal Sole, non generi ombra ma solo penombra? (il diametro apparente del Sole sia 32'.)

    Soluzione: Concettualmente il problema è equivalente alla situazione di un'eclisse: l'"osservatore" è lo schermo, mentre fra esso e il Sole si frappone un ostacolo. Esso, intercettando i raggi solari, genera dietro di sé un cono d'ombra, e, molto più ampio di questo, una zona di penombra. Il cono si restringe dalla parte opposta del Sole rispetto alla sfera. Se il vertice del cono si trova sullo schermo, allora nessun punto dello schermo si troverà in ombra perché il cono *non interseca* lo schermo. In questa configurazione, l'angolo sotto cui viene vista la sfera dallo schermo è di 32', ovvero 0,53°, da cui si ha: $\frac{R}{d} = \tan\,(0{,}53/2)$ e cioè d=[1/ tan(0,265)]*R=214,8 R circa: la sfera dev'essere posta a una distanza dallo schermo maggiore di 214,8 volte circa il suo raggio.

13. Il 29 marzo 2006 si è verificata un'eclisse totale di Sole, visibile dall'Africa settentrionale e dal Mediterraneo orientale. Quale fase aveva la luna il 29 marzo 2007, cioè esattamente un anno dopo?

Soluzione: Le eclissi di Sole si verificano quando la Luna si interpone fra il Sole e la Terra, oscurando una fascia sulla superficie del nostro pianeta con il suo cono d'ombra: pertanto, la Luna rivolge a noi, in quest'occasione, la sua faccia non illuminata dal Sole e pertanto è *nuova*. Conosciamo inoltre il periodo in cui si ripetono le fasi lunari: è il mese sinodico, la cui durata è pari a 29,5306 giorni. L'intervallo considerato (un anno, in cui il 2007 non è bisestile), è pari a 365 giorni. Siccome 365/29,5306=12,36, ossia 12 mesi lunari e 11 giorni, se ne deduce che l'età della Luna al 29 marzo 2007 era di 11 giorni, quindi essa era in una fase intermedia tra primo quarto e Luna piena.

- **LA GRAVITA':**

14. L'alieno Bzzapp ha appena comprato una navicella in grado di creare nuovi pianeti; nel suo girovagare, un giorno incappa nel nostro Sistema Solare; decide così di creare con la sua astronave qualche nuovo pianeta. L'amico Zorzzp gli dà prima una regola, dicendogli che questi pianeti devono trovarsi in una fascia compresa fra 2 U.A. e 7 U.A.; in più, il loro periodo di rivoluzione dev'essere pari a un numero intero di anni. Qual è il numero massimo di pianeti che Bzzapp potrà creare con la sua navicella conformemente alla regola di Zorzzp?

Soluzione: Per la risoluzione del problema è necessaria la Terza legge di Keplero, considerando che ci troviamo nel nostro Sistema Solare e che quindi la costante di proporzionalità fra cubo del semiasse maggiore e quadrato del periodo di rivoluzione per un generico corpo orbitante attorno al Sole, quando esprimiamo il semiasse in UA e il periodo in anni, risulta pari a 1.

$$T_1 = \sqrt{{a_1}^3} = 2{,}83\ y$$
$$T_2 = \sqrt{a_2^3} = 18{,}52\ y$$

Come possiamo vedere, i periodi "possibili" sono 3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17 e 18 anni: Bzzapp potrà creare ben 16 pianeti!

15. Disponendo come dati noti dei soli periodi di rivoluzione dei pianeti, si indichi la lunghezza minima che deve avere un foglio di carta per poter rappresentare in scala il Sistema Solare fino a Nettuno, nell'ipotesi di voler rappresentare Mercurio a una distanza dal Sole di 1 cm.

Soluzione: Mercurio ha un periodo di rivoluzione pari a 0,241 anni mentre Nettuno 164,88 anni: quindi, per la Terza legge di Keplero: $a_M = \sqrt[3]{T_M^2} = 0{,}387 UA \ e \ a_N = \sqrt[3]{T_N^2} = 30{,}069\ UA$.
Con una semplice proporzione ricaviamo la lunghezza del foglio di carta:

$$a_M : a_N = 1 : x \quad \rightarrow x = \frac{30{,}069}{0{,}387} cm \approx 77{,}7\ cm$$

16. A quale distanza dalla superficie della Terra, per un'astronave che viaggia verso la Luna, si annulla la risultante delle forze gravitazionali che agiscono su di essa? (il rapporto massa della Terra/ massa della Luna è pari a 81,25).

Soluzione: La distanza Terra-Luna è pari a d=384400 km. Quando l'astronave si trova fra il nostro pianeta e il suo satellite, le due forze di natura gravitazionale che agiscono su di essa sono la forza di attrazione della Terra e quella della Luna, agenti nella stessa direzione ma aventi verso opposto. Chiamando x la distanza che separa la navicella dal centro della Terra, possiamo esprimere in funzione di x la distanza che separa la navicella dalla Luna, essendo essa pari a d-x. Eguagliamo le due forze di attrazione gravitazionale per trovare x.

$$\frac{GM_T m}{x^2} = \frac{GM_L m}{(d-x)^2}$$

Operando le dovute semplificazioni (G e la massa dell'astronave) e dividendo:

$$\frac{x}{d-x} = \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = \sqrt{81{,}25} = 9{,}01$$

$$x = \frac{9{,}01d}{10{,}01} = 0{,}90 * 384400km = 346013km$$

Il problema viene considerato parzialmente corretto se ci si ferma a questo punto, perché esso chiede la distanza dalla superficie terrestre mentre x è misurata dal centro della Terra: pertanto la soluzione corretta è: D=x-R=(346013-6378)km=339635km.

17. Osservando la stella Canopo con un telescopio potentissimo, l'astronomo Qwzzz ha scoperto due pianeti orbitanti attorno a essa, le cui orbite sono esattamente perpendicolari alla nostra linea di vista. La distanza massima del primo pianeta da Canopo è uguale a 4,7 volte la sua distanza minima, e il suo periodo di rivoluzione è pari a 2,7 anni. Il secondo pianeta, avente eccentricità pari a 0,324, al periapside è 3 volte più lontano rispetto al primo (quando quest'ultimo si trova nella corrispondente posizione). Quanto vale l'eccentricità del primo pianeta e il periodo di rivoluzione del secondo?

Soluzione: Chiamiamo 1 il primo pianeta e 2 il secondo:

$$\frac{d_{a1}}{d_{p1}} = 4{,}7 = \frac{a_1(1+e_1)}{a_1(1-e_1)} \rightarrow \frac{1+e_1}{1-e_1} = 4{,}7 \rightarrow e_1 = 0{,}649$$

$$\frac{d_{p2}}{d_{p1}} = \frac{a_2(1-e_2)}{a_1(1-e_1)} = 3 \rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{(1-e_1)d_{p2}}{d_{p1}(1-e_2)} = 3\left(\frac{1-0{,}649}{1-0{,}324}\right) = 1{,}558$$

Per la Terza legge di Keplero:

$$T_2^2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 T_1^2 \rightarrow T_2 = 2{,}7\ y\sqrt{1{,}558^3} = 5{,}24\ y$$

- **TERZA LEGGE DI KEPLERO:**

1. Calcolare il semiasse maggiore dell'orbita di Giove, in kilometri, sapendo che il suo periodo di rivoluzione è $T_G = 374{,}11 \cdot 10^6\ s$

Soluzione:

$$T_G(anni) = \frac{T_G(secondi)}{(secondi\ in\ un\ anno)} = \frac{374{,}11 \cdot 10^6\ s}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot \frac{s}{anno}} = 11{,}863\ anni$$

Impostando la terza legge di Keplero e imponendo che $K = \frac{1\ anno^2}{1\ U.A.^3}$

$$\frac{T^2}{a^3} = K \quad => a_G(U.A.) = \sqrt[3]{[T_G(anni)]^2} = \sqrt[3]{(11{,}863\ anni)^2} = 5{,}2\ U.A. =$$
$$= 777{,}92 \cdot 10^6\ km$$

2. Calcolare il periodo di rivoluzione di Marte, in giorni, sapendo che il suo semiasse maggiore misura $a_M = 227{,}9 \cdot 10^9\ m$.

Soluzione:

$$a_M(U.A.) = \frac{a_M(m)}{149{,}6 \cdot 10^9 \cdot \frac{m}{U.A.}} = \frac{227{,}9 \cdot 10^9\ m}{149{,}6 \cdot 10^9 \cdot \frac{m}{U.A.}} = 1{,}52\ U.A.$$

Impostando la terza legge di Keplero e imponendo che $K = \frac{1\ anno^2}{1\ U.A.^3}$

$$\frac{T^2}{a^3} = K \quad => T_M(anni) = \sqrt{[a_M(U.A.)]^3} = \sqrt{(1{,}52\ U.A.)^3} = 1{,}87\ anni = 684\ giorni$$

3. Approssimando l'orbita di Venere a una circonferenza, calcolare la velocità media *v* del pianeta intorno al Sole sapendo che il suo periodo di rivoluzione è $T_V = 19{,}41 \cdot 10^6\ s$.

Soluzione:

$$T_V(anni) = \frac{T_V(secondi)}{(secondi\ in\ un\ anno)} = \frac{19{,}41 \cdot 10^6\ s}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot \frac{s}{anno}} = 0{,}61\ anni$$

Impostando la terza legge di Keplero e imponendo che $K = \frac{1\ anno^2}{1\ U.A.^3}$

$$\frac{T^2}{a^3} = K \quad => a_V(U.A.) = \sqrt[3]{[T_V(anni)]^2} = \sqrt[3]{(0.61\ anni)^2} = 0{,}72\ U.A. = 107{,}6 \cdot 10^6\ km$$

$$v = \frac{2\pi a_V}{T_V} = \frac{2\pi \cdot 107{,}6 \cdot 10^6\ km}{19{,}41 \cdot 10^6\ s} = 34{,}83\ \frac{km}{s}$$

Risoluzione del sistema per il calcolo delle velocità su orbite non circolari

$$\begin{cases} v_a d_a = v_p d_p \\ \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GmM}{d_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GmM}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GmM}{d_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GmM}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{\frac{1}{2} \cancel{m} v_p^2 d_p^2}{d_a^2} - \frac{G\cancel{m}M}{d_a} = \frac{1}{2} \cancel{m} v_p^2 - \frac{G\cancel{m}M}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{\frac{1}{2} v_p^2 d_p^2}{d_a^2} - \frac{1}{2} v_p^2 = \frac{GM}{d_a} - \frac{GM}{d_p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{1}{2} v_p^2 \left(\frac{d_p^2}{d_a^2} - 1 \right) = GM \left(\frac{1}{d_a} - \frac{1}{d_p} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ \frac{1}{2} v_p^2 \left(\frac{d_p^2 - d_a^2}{d_a^2} \right) = GM \left(\frac{d_p - d_a}{d_a d_p} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \frac{v_p d_p}{d_a} \\ v_p^2 = 2GM \left(\frac{d_p - d_a}{d_a d_p} \right) \left(\frac{d_a^2}{d_p^2 - d_a^2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \dfrac{v_p d_p}{d_a} \\ v_p^2 = 2GM\left(\dfrac{\cancel{d_p - d_a}}{\cancel{d_a} d_p}\right)\left[\dfrac{d_a^{\cancel{2}}}{(d_p + d_a)\cancel{(d_p - d_a)}}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a = \dfrac{v_p d_p}{d_a} \\ \boldsymbol{v_p} = \sqrt{\boldsymbol{2GM}\dfrac{\boldsymbol{d_a}}{\boldsymbol{d_p(d_p + d_a)}}} \end{cases}$$

Sostituendo la formula appena trovata nella prima equazione, si ottiene:

$$\boldsymbol{v_a} = \sqrt{\boldsymbol{2GM}\frac{\boldsymbol{d_p}}{\boldsymbol{d_a(d_p + d_a)}}}$$

Possiamo scrivere le due velocità anche in funzione (cioè in dipendenza) del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita. Se chiamiamo il semiasse maggiore dell'orbita ellittica a, valgono le seguenti relazioni:

$$d_a = a(1 + e) \qquad\qquad d_p = a(1 - e)$$

Quindi:

$$v_p = \sqrt{2GM\frac{a(1+e)}{a(1-e)[a(1-e) + a(1+e)]}} = \sqrt{2GM\frac{1+e}{(1-e)[a(1-e+1+e)]}}$$

$$= \sqrt{\frac{2GM}{2a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{GM}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}}$$

Sostituendo anche nel caso di Va:

$$v_a = \sqrt{\boldsymbol{\frac{GM}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}}$$

Si ricorda inoltre che:

$$\boldsymbol{a = \frac{d_a + d_p}{2}} \qquad\qquad \boldsymbol{e = \frac{d_a - d_p}{d_a + d_p}}$$

ESERCIZIO:

Un pianeta sta cadendo sulla sua stella seguendo una traiettoria rettilinea: se si conosce l'altezza di caduta, h, si determini il tempo di caduta t.

Per risolvere questo problema si potrebbe erroneamente pensare di applicare le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato (come nel caso di una penna che cade dalla scrivania).
Consideriamo però un corpo (di massa m) che si trova a una certa altezza dal suolo: la sua forza peso equivale alla forza di attrazione gravitazionale tra il corpo e il pianeta (di raggio R e massa M) su cui si trova

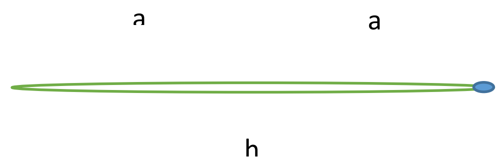
$$mg = \frac{mMG}{(R+h)^2} \quad cio\grave{e} \quad g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

Come possiamo vedere, l'accelerazione di gravità g non si mantiene costante al variare dell'altezza, ma varia; noi la assumiamo costante al suolo e pari a circa 9,81 m/s^2 solo perché in quel caso Δh≈0!

Quindi non possiamo applicare le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato a questo problema! Come risolverlo allora?

All'inizio di questi appunti abbiamo evidenziato che l'eccentricità di un'ellisse indica quanto l'ellisse è "schiacciata": se dunque l'eccentricità tende a 1, la traiettoria tende a un segmento!

Quindi possiamo assumere che il pianeta cada seguendo un'orbita ellittica con eccentricità prossima a 1, e dunque semiasse maggiore a pari a h/2 (vedi figura):



Se conosciamo la massa M della stella, possiamo applicare la III legge di Keplero generalizzata:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a^3} \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}\left(\frac{h}{2}\right)^3} \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{\pi^2}{2GM}h^3}$$

Naturalmente questo è il periodo completo dell'orbita. Il periodo di caduta è la metà:

$$t = \frac{T}{2}$$

Problemi

1. Coordinate celesti e tempo

Ci troviamo in un luogo di latitudine $\varphi = 42°\,30'15''\,N$ e longitudine $\lambda = 15°\,28'18''E$. Osserviamo una stella, di ascensione retta 5h 32 min 3 sec e declinazione -00° 15' 20", che passa al meridiano alle 20:30 del 14/01/2020. A quale altezza culminava? Quale era la sua distanza zenitale? In quale data, dallo stesso luogo e allo stesso orario, si è potuto vederla sorgere ad est?

Soluzione:

L'altezza massima di una stella (quando culmina) è data dalla relazione:

$$h = 90° - \varphi + \delta$$

Quindi:

$$h = 90° - 42°30'15'' - 0°\,15'\,20'' = 47°\,14'\,25''$$

La distanza zenitale è invece data da: $z = 90° - \varphi = 90° - 47°\,14'25'' = 42°\,45'35''$

Un dato importante per poter rispondere alla terza richiesta è sapere che le stelle "anticipano" il loro sorgere di 3 min 56 $sec/giorno$

Quindi per sapere quanti giorni prima la stella sorgeva ad est (m):

$$m = \frac{\alpha}{\Delta t} = \frac{(5^h 32^{\min} 3^{\sec})}{3^{min}\,56^{\sec}/giorno} = 84\,giorni$$

84 giorni prima del 14/01/2020 era il 21/10/2019.

2. Coordinate e tempo

Il tempo siderale di un luogo ($\varphi = 28°\,30'45''S$; $\lambda = 90°\,23'50''W$) è di 9h 3min 45sec. Quale è il tempo siderale di GW?

Soluzione: Il primo passaggio da fare è trasformare la longitudine del luogo da gradi in ore. Quindi:

$$15°: 1h = 90°\,23'50'': \lambda$$

$$\lambda = 90°\,23'50'' \cdot \frac{1h}{15°} = 6h\,1\min 35.33sec$$

Il tempo siderale del luogo è legato a quello di GW dalla seguente relazione:

$$Ts = TGw + \lambda$$

Quindi: $TGw = Ts - \lambda = 9h3\min 45sec - (-\,6h1\min 35.33\sec) = 9h3\min 45sec + 6h1\min 35.33\sec\ = 15h\,5\min\ \ 20sec$

PROBLEMI E QUESITI SULLA MISURA DEL TEMPO

<u>Problema 1</u>: In un dato luogo, a che ora di tempo siderale culmina il Sole medio in un dato giorno, sapendo che sedici giorni prima esso culminava alle 15h 12m 48s di tempo siderale?
Se ci troviamo a Belo Horizonte (longitudine λ=43°56'16" W) al mezzogiorno vero e l'equazione del tempo per quel giorno è pari a ET=-8m7s, che ora segna l'orologio dell'osservatore?

Soluzione problema 1: La prima richiesta del problema si risolve tenendo conto che giorno solare medio e giorno siderale hanno diversa durata: infatti il giorno siderale è più corto del giorno solare medio di circa 3m56s. Pertanto, se in un dato giorno il punto gamma e il Sole medio hanno raggiunto la culminazione nel medesimo istante, il giorno successivo il Sole medio culminerà 3m56s dopo il punto gamma. Quindi il Sole accumulerà un ritardo pari a 16*3m56s=1h2m56s che andrà sommato all'ora siderale data dal problema: TS=15h 12m 48s + 1h 2m 56s= 16h 15m 44s.
Se a Belo Horizonte è mezzogiorno vero, vuol dire che sono le 12h di tempo solare vero. L'equazione del tempo è la differenza fra tempo solare medio e tempo solare vero, quindi:
TSM-TSV=ET ; TSM=TSV+ET=12h – 8m 7s= 11h 51m 53s; l'orologio dell'osservatore è però in accordo col tempo del meridiano centrale del fuso di Belo Horizonte, che ha longitudine 3h W, mentre Belo Horizonte ha longitudine 2h 55m 45s W: essa è quindi più avanti di 3h-2h 55m 45s=4m 15s: l'orologio segnerà quindi le ore 11h 51m 53s – 4m 15s= 11h 47m 38s.

<u>Problema 2</u>: A Bergamo (λ= 9° 40' 12" E) i raggi del Sole, in un dato momento, si proiettano esattamente sulla linea della meridiana di Città Alta. In quel dato giorno l'equazione del tempo è +5m 12s. se il tempo siderale a mezzanotte di quel giorno a Greenwich risultava pari a 3h 21m 20s, qual è il tempo siderale a Greenwich nell'istante del problema?

Soluzione problema 2: La longitudine di Bergamo, espressa in ore, minuti e secondi è 38m 41s E. Se il disco luminoso si proietta sulla linea meridiana, è mezzogiorno vero; quindi il tempo solare medio sarà pari a: TSM= TSV + ET= 12h + 5m 12s= 12h 5m 12s. Greenwich si trova 38m 41s a ovest di Bergamo, quindi è anche 38m 41s *indietro*: a Greenwich sono quindi le 12h 5m 12s – 38m 41s= 11h 26m 31s. Sono passate quindi 11h 26m 31s dalla mezzanotte: per convertire questo tempo medio in tempo siderale moltiplichiamo per il fattore di conversione 366,25/365,25:
ΔTS (Greenwich)= (366,25/365,25)*(11,4419444 h)= 11,4732394h = 11h 28m 24s. Quindi a Greenwich sono le 3h 21m 20s + 11h 28m 24s= 14h 49m 44s di tempo siderale.

<u>Quesito</u>: Si valuti, argomentando opportunamente, come varia l'Equazione del Tempo nel corso dell'anno solare; se in un piano cartesiano in ascissa indichiamo l'ET e in ordinata la declinazione del Sole, che curva si ottiene?

Risposta: L'equazione del tempo si annulla quattro volte l'anno: a metà aprile, a metà giugno, verso Natale e ai primi di settembre: il sole medio e il sole vero culminano contemporaneamente; (1) Da Natale a metà aprile il sole medio anticipa il sole vero; (2) da metà aprile a metà giugno il sole vero anticipa il sole medio; da metà giugno a inizio settembre come (1) e da inizio settembre a Natale come (2). Oltre a "oscillare in orizzontale", in un anno il sole "oscilla in verticale", nel senso che assume declinazioni da 23°27’ a -23°27’. La curva che si ottiene è quindi una sorta di “8” chiamata *analemma*: essa è anche la curva che è formata dalle posizioni in cielo del sole vero registrate a mezzogiorno medio locale ogni giorno dell’anno.

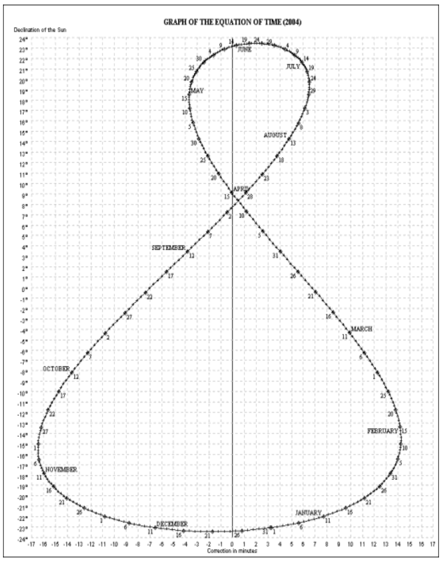


Figura 1: Analemma dec/ET

Figura 2: Analemma visualizzato nel cielo di Atene

<ins>Problema 3:</ins> Una stella di ascensione retta AR=11h 12m 13s culmina in un dato luogo della Terra alle ore 13h 04m 02s di tempo medio. Considerando che a Greenwich culmina una stella con ascensione retta 8h 11m 58s, dire che orario segna l’orologio dell’osservatore in quel dato luogo della Terra.

Soluzione: Il tempo siderale in un dato luogo è uguale all’ascensione retta delle stelle che si trovano a culminare al meridiano superiore. Quindi in questo luogo della Terra il tempo siderale è pari a 11h 12m 13s; a Greenwich il tempo siderale è pari a 8h 11m 58s. Notiamo come il luogo dove si trova l’osservatore ha longitudine est: infatti è più avanti di Greenwich di circa 3 ore, quindi è più a Est di Greenwich. La differenza fra l’ora siderale dell’osservatore e quella a Greenwich dà la longitudine del luogo (differenza fra longitudine del luogo e longitudine di Greenwich che è 0 perché il suo meridiano è origine delle longitudini):
λ= TS’-TS(GW)= 11h 12m 13s – 8h 11m 58s= 3h 0m 15s E. Questo luogo segue il meridiano che ha longitudine 3h E, quindi è in anticipo rispetto a esso di appena 15s: pertanto il suo orologio segnerà le ore 13h 04m 02s – 15s= 13h 03m 47s.

- **STELLE E MAGNITUDINI, SISTEMI STELLARI ESTESI**

1. Pochi giorni fa si è registrato un nuovo oggetto che si comporta apparentemente come una binaria a eclisse. Tuttavia il periodo non è stabile: la magnitudine dell'oggetto è in genere pari a 24,32, ma ogni 7-11 secondi sale a 24,52 per 0,2-0,3 secondi. Dopo un'accurata analisi del problema si è capito che l'oggetto splendente è costituito dagli occhi di un gruppo di gatti assolutamente neri seduti su un piccolo corpo del sistema solare, nero, e con gli sguardi rivolti verso il sole. Uno dei gatti batte ogni tanto le palpebre. Quanti gatti ci sono?

   Soluzione: Sia N il numero di occhi, la cui determinazione è richiesta dal problema. Quando il gatto nero del problema chiude gli occhi, il numero di occhi che contribuisce alla magnitudine complessiva scende di due unità (N-2). Se consideriamo che gli occhi dei gatti sono tutti gli stessi, ciascuno di essi ci invia un flusso pari a F. Avendo entrambe le magnitudini corrispondenti alla situazione "tutti gli N occhi aperti" (24,32) e "N-2 occhi aperti" (24,52), possiamo scrivere la formula di Pogson tenendo conto dei flussi complessivi:

$$m_{min} - m_{max} = -2{,}5log\left[\frac{F*(N-2)}{F*N}\right]$$

$$\frac{N-2}{N} = 10^{\frac{m_{max}-m_{min}}{2{,}5}} = 10^{-0{,}08} = 0{,}832 \rightarrow N = \frac{2}{0{,}168}$$

$$\approx 12\ occhi\ \text{ ossia } 6\ gatti$$

2. La galassia di Andromeda ha una magnitudine apparente integrata mv = 4.40 e appare in cielo come un'ellisse i cui semiassi hanno dimensioni angolari di circa 190 arcmin e 60 arcmin. Sapendo che la sua distanza è di circa 2.54 milioni di anni luce, calcolare la magnitudine assoluta e la magnitudine apparente superficiale media della galassia. (*Gara Interregionale Categoria Senior, 2018*)

Soluzione: La distanza della galassia di Andromeda in pc è: $d(pc)$ =2,54 *10^6*3.262= 778*10^3 pc
La magnitudine assoluta è data dalla relazione:
Mv = mv + 5 − 5 log $d(pc)$ = -20.1
Per calcolare la magnitudine apparente superficiale dobbiamo calcolare l'area apparente della galassia:
A = π a b = π 190 · 60 = 35.8 · 103 $arcmin2$ ≅ 129 · 106 $arcsec$^2
La magnitudine apparente superficiale (msup) si ottiene dalla relazione:
$msup$ = mv +2.5 log A ≅ 15.8$mag/arcmin$^2 ≅ 24.7$mag/arcsec$^2.

3. Si consideri una stella variabile "pulsante" la cui magnitudine assoluta varia nell'intervallo: M1= 3.25 e M2= 2.26, con una temperatura effettiva che al massimo di luminosità è T2= 5500 K e al minimo di luminosità è T1 = 5000 K. Calcolare quanto varia il raggio della stella tra il minimo e il massimo di luminosità. Esprimere il

risultato come rapporto tra raggio massimo e raggio minimo e come differenza tra i due raggi in km. (*Gara Interregionale Categoria Senior, 2017*)

*Soluzione***:** La luminosità di una stella è definita dalla relazione: L=4 π R^2 σ T^4.
Per ricavare il rapporto tra i raggi al massimo e minimo di luminosità utilizziamo la formula di Pogson:
$M$2− $M$1= − 2.5log($L$2/$L$1)=− 2.5log{[4π($R$2)^2 σ ($T$2)^4]/[4π($R$1)^2 σ ($T$1)^4]}= -2.5log[($R$2/$R$1)^2 * ($T$2/$T$1)^4] e quindi:
0.396 = log[($R$2/$R$1)^2 * ($T$2/$T$1)^4] =log [($R$2/$R$1)^2 * 1.464] da cui: 0.396=2log($R$2/$R$1)+log1.464
ovvero: 0.115= log ($R$2/$R$1) e infine (**$R$2/$R$1**)=**1.30**
Per ottenere la differenza in km, calcoliamo il raggio della stella al massimo di luminosità confrontando i suoi dati con una stella di caratteristiche note: il Sole. Avremo quindi:
$M$2− Ms=− 2.5log[($R$2/Rs)^2 * ($T$2/Ts)^4] e quindi: 1.03 = 2 log R2 – 2 log Rs + 4 log 0.9519
da cui si ricava: $R$2=2513 · 10^3 km≅3.61 Rs e $R$1=1933 · 10^3 km≅2.78 Rs
la variazione del raggio in km vale quindi: **ΔR = 580 · 103 km**

4. La supergigante rossa Betelgeuse ha una magnitudine apparente m1=+0,42 e una parallasse π1=0,005", mentre la supergigante blu Rigel ha una magnitudine apparente m2=+0,13 e una parallasse π2=0,004". Quale delle due stelle è, intrinsecamente, più luminosa? Qual è la più lontana? *(Gara interregionale, Categoria Senior, 2015)*

   Soluzione: Affinché si possa determinare quale delle due stelle sia più luminosa intrinsecamente, è necessario ricorrere al calcolo delle magnitudini assolute delle due stelle: possiamo calcolare la magnitudine assoluta di una stella conoscendo la magnitudine apparente della stessa e la sua parallasse tramite la relazione:

   $$M = m + 5 + 5log\pi \ \ , ove\ la\ parallasse\ \text{è}\ espressa\ in\ arcosecondi.$$

   Nel caso nostro:

   $$M1 = m1 + 5 + 5log\pi1 = +0{,}42 + 5 + 5log0{,}005 = -6{,}08\ (Betelgeuse)$$
   $$M2 = m2 + 5 + 5log\pi2 = +0{,}13 + 5 + 5log0{,}004 = -6{,}87\ (Rigel)$$

   Essendo la magnitudine assoluta di Rigel minore di quella di Betelgeuse, allora Rigel è intrinsecamente più luminosa di Betelgeuse. Possiamo già da questo risultato comprendere quale stella sia più distante delle due: infatti Rigel è sia apparentemente sia assolutamente più luminosa di Betelgeuse, quindi è necessario che essa sia più distante di Betelgeuse affinché ciò si verifichi. A riprova di ciò, la parallasse di Rigel è minore di quella di Betelgeuse, essendo essa più lontana. La distanza di Rigel in parsec è 1/π2=250 pc mentre quella di Betelgeuse è 1/π1=200 pc da cui d2>d1.

- **COSMOLOGIA ELEMENTARE**

5. Un team di scienziati osserva una nuova galassia e ne analizza lo spettro: la riga H-alfa dell'idrogeno, che ha in laboratorio una lunghezza d'onda pari a 6562,81 Å, ha nello spettro della galassia una lunghezza d'onda di 6569,33 Å. Si determini la distanza della galassia.

   Soluzione: per prima cosa calcoliamo il *redshift* della galassia:
   $$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{oss} - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}} = \frac{6569{,}33 - 6562{,}81}{6562{,}81} = 9{,}935 * 10^{-4}$$
   Applichiamo la legge di Hubble-Lemaitre:
   $$cz = H_0 d \rightarrow d = \frac{cz}{H_0} = 299792{,}458\frac{km}{s} * 9{,}935 * \frac{10^{-4}}{71{,}9} = 4{,}14\ Mpc.$$

6. Osservando l'esplosione di una supernova in una lontana galassia, due scienziati notano che la riga H-beta dell'idrogeno osservata nello spettro, ha esattamente la stessa lunghezza d'onda della riga H-alfa osservata in laboratorio. Tuttavia i due scienziati usano valori diversi per la costante di Hubble. Usando valori che differiscono di ΔH=H2-H1=14 km/s/Mpc, ottengono valori diversi per la magnitudine assoluta della supernova al massimo: M1=-19,02 e M2=-18,64. Trovare quanto valgono, per ciascuno dei due scienziati, il redshift e la distanza della galassia. (*XXIII International Astronomy Olympiad – Colombo, Sri Lanka, Theoretical Round, Group β, Exercise 1)*

   Soluzione: Il redshift misurato dai due scienziati è lo stesso per entrambi: esso infatti dipende dalle lunghezze d'onda osservate, che, secondo quanto affermato nella traccia, sono le stesse per entrambi gli scienziati. La lunghezza d'onda della riga H-alfa è pari a 6563 Å, mentre la lunghezza d'onda della riga H-beta è pari a 4861 Å. Il redshift, per definizione, è dunque pari a:
   $$z = \frac{\lambda_{H-alfa} - \lambda_{H-beta}}{\lambda_{H-beta}} = 0{,}35$$
   Conoscendo la relazione nota come "modulo di distanza" (relazione fra mag. Apparente e mag. Assoluta), possiamo scrivere:
   $$M_1 = m_1 + 5 - 5log d_1$$
   $$M_2 = m_2 + 5 - 5log d_2$$
   Ma le due magnitudini apparenti dell'oggetto debbono necessariamente coincidere, dal momento che esse sono dati puramente osservativi (non derivano, cioè, da elaborazioni di dati precedenti): possiamo quindi sottrarre membro a membro le due relazioni precedenti semplificando le due magnitudini apparenti:
   $$M_1 - M_2 = 5log\left(\frac{d_2}{d_1}\right) \rightarrow \frac{d_2}{d_1} = 10^{\frac{M_1 - M_2}{5}} = 0{,}839$$
   Possiamo scrivere il seguente sistema:
   $$\begin{cases} d_2 = 0{,}839 d_1 \\ \mathrm{H2 - H1 = 14} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{cz}{H2} = 0{,}839\frac{cz}{H1} \\ \mathrm{H2 - H1 = 14} \end{cases} \quad \begin{cases} H2 = 1{,}19 H1 \\ H2 - H1 = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} H1 = \frac{\frac{73{,}68 km}{s}}{Mpc} \\ H2 = \frac{87{,}68\frac{km}{s}}{Mpc} \end{cases}$$

Da cui, finalmente:
d1=cz/H1=299792,458*0,35/76,68=1368,4 Mpc
dz=cz/H2=299792,458*0,53/87,68=1196,7 Mpc.

- **MISCELLANEA**

1. Una galassia è composta da stelle tutte simili al nostro Sole. Essa mostra uno spostamento verso il rosso della riga Hα (λ=6562,81 Å) di ampiezza pari a Δλ= 1,5 Å. Essa risulta inclinata rispetto alla perpendicolare alla linea di vista di un angolo di 30° e si sa che il suo raggio è pari a 37000 anni luce. Nel cielo appare come un oggetto di magnitudine superficiale m_{sup}= 24,78 mag/arcsec^2.
Quanto vale la massa della galassia?

Soluzione: Ci viene fornita dalla traccia la magnitudine superficiale della galassia vista dalla Terra: essa indica la magnitudine di una "porzione" della galassia di superficie pari a 1 arcsec^2. Di conseguenza, la magnitudine complessiva della galassia dev'essere legata alla sua superficie angolare: allora dobbiamo conoscere le dimensioni angolari della galassia; abbiamo le dimensioni angolari, quindi dobbiamo ricavare la distanza della galassia:
Calcoliamo per prima cosa il redshift z:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1{,}5}{6562{,}81} = 2{,}29 \cdot 10^{-4}$$

Con la legge di Hubble-Lemaitre ricaviamo la distanza:

$$cz = H_0 d \qquad d = \frac{cz}{H_o} = \frac{3{,}00 \cdot 10^5 \cdot 2{,}29 \cdot 10^{-4}}{71{,}9} Mpc = 0{,}954\, Mpc$$
$$= 3{,}11 \cdot 10^6 anni\ luce$$

Adesso possiamo determinare le dimensioni apparenti della galassia perché ne conosciamo la distanza: nel cielo essa ci appare come un'ellisse il cui semiasse maggiore vale:

$$a = \arctan\left(\frac{R}{d}\right) = \arctan\left(\frac{37000}{3{,}11 \cdot 10^6}\right) = 0{,}682° = 2453{,}8\, arcsec$$

Essendo il coseno di 30° uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, il semiasse minore varrà:

$$b = \arctan\left(\frac{R\sqrt{3}}{2d}\right) = \arctan\left(\frac{37000 \cdot 1{,}73}{2 \cdot 3{,}11 \cdot 10^6}\right) = 0{,}590° = 2122{,}6\, arcsec$$

Calcoliamo la superficie di questa ellisse:

$$S = \pi ab = \pi \cdot 2453{,}8 \cdot 2122{,}6\, \text{arcsec}^2 = 1{,}63 \cdot 10^7\, \text{arcsec}^2.$$

A questo punto ricaviamo la magnitudine integrata apparente:
m=m_{sup}-2,5log(S) $\quad m = 24{,}78 - 2{,}5\log(1{,}63 \cdot 10^7) = 6{,}75$.
Abbiamo la distanza: troviamo la magnitudine assoluta:
M=m+5-5logd=6,75+5-5log(0,954* 10^6)=-18,15.
A questo punto troviamo il numero di "soli" contenuti nella galassia grazie alla relazione che ci permette di ricavare la magnitudine integrata di un oggetto (nel caso sia composto da componenti uguali):

$$M = -2{,}5\log(N * 10^{-0{,}4M_s}) \qquad N = 10^{-0{,}4(M-M_S)} = 10^{-0{,}4(-18{,}15-4{,}83)} = 1{,}56 \cdot 10^9 stelle\ come\ il\ sole!$$

Possiamo finalmente trovare la massa della galassia:

$$M_g = 1{,}56 \cdot 10^9 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30} kg = 3{,}10 \cdot 10^{39} kg.$$

2. Una stella di raggio R=705000 km presenta un picco d'emissione alla lunghezza d'onda di 542 nm. Se essa è costituita interamente da idrogeno, si determini quanti atomi di idrogeno hanno reagito in un secondo nel nucleo della stella, nella reazione di fusione termonucleare che produce elio.

Soluzione: Dobbiamo innanzitutto determinare la luminosità della stella, che dipende dal quadrato del raggio e dalla quarta potenza della temperatura; disponiamo del raggio, ma dobbiamo ricavare la temperatura; notiamo come il problema fornisca la lunghezza d'onda del picco d'emissione, che è inversamente proporzionale alla temperatura efficace secondo la Legge di Wien:

$\lambda \cdot T_{eff} = 2{,}898\ mm\ K \qquad T_{eff} = \frac{2{,}898\ mm\ K}{542 \cdot 10^{-6} mm} = 5347\ K$

Adesso possiamo determinare la luminosità della stella (Legge di Stefan-Boltzmann):

$$L = 4\pi R^2 \sigma \left(T_{eff}\right)^4 = 4\pi\ (7{,}05 \cdot 10^8)^2\ 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ (5347)^4\ W = 2{,}89 \cdot 10^{26} W$$

Questa è l'energia che la stella irradia in un secondo, ma da dove deriva? Nel nucleo, quattro protoni si fondono per formare un nucleo di elio: il nucleo di elio che si forma, però, non ha la stessa massa dei quattro protoni, bensì ha una massa lievemente minore. La massa mancante (il *difetto di massa*) si è trasformata in energia secondo la famosa relazione di Einstein

$$E = mc^2$$

Se E=L, m sarà uguale al difetto di massa complessivo per unità di tempo:

$$m = \frac{L}{c^2} = \frac{2{,}89 \cdot 10^{26} W}{9 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{s^2}} = 3{,}21 \cdot \frac{10^9 kg}{s}$$

Essendo la massa di un nucleo di elio-4 pari a 6,645 *10^{-27}kg, mentre la massa del protone pari a 1,673*10^{-27}kg, si ha che la massa di 4 protoni è 6,692*10^{-27}kg e quindi il difetto di massa per ogni reazione è Δm= 0,047*10^{-27} kg. Dividendo questo valore per quello trovato sopra, otteniamo il numero di reazioni che avvengono in un secondo nel nucleo della stella:

$$N = \frac{m}{\Delta m} = \frac{3{,}21 \cdot 10^{9}}{0{,}047 \cdot 10^{-27}} reaz. = 6{,}83 \cdot 10^{37} reaz.$$

A ogni reazione corrispondono quattro atomi di idrogeno, quindi per trovare la soluzione ci basta moltiplicare questo valore per 4:

$N_{tot} = 4N = 2{,}73 \cdot 10^{38} atomi(!)$.

3. Che dimensioni dovrebbe avere una sfera metallica perfettamente riflettente per essere visibile come un astro da Terra ad occhio nudo, quando essa si trova in opposizione al Sole? (Questa sfera è posta in orbita circolare attorno alla Terra con un periodo T=2,766 ore).

Soluzione: Innanzitutto ci serve conoscere il raggio orbitale della sfera, perciò applichiamo la Terza Legge di Keplero generalizzata:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \qquad a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 9{,}92 \cdot 10^{7}}{4(3{,}14)^2}} = 10005 km$$

Sia F_S il flusso solare: esso investe la sfera e la quantità di energia intercettata in un secondo (L_{int}) è direttamente proporzionale alla sezione della sfera:

$$L_{int} = F_s \cdot \pi R^2$$

La luce viene interamente riflessa, quindi

$$L_{rif} = L_{int} = F_s \cdot \pi R^2$$

Questa luminosità viene riflessa in tutte le direzioni, quindi tutti i punti che si trovano alla medesima distanza dalla sfera riceveranno lo stesso flusso pari a:

$$F = \frac{F_s \cdot \pi R^2}{4\pi d^2} = \frac{F_s \cdot R^2}{4d^2}$$

In particolare, per una località posta sulla Terra:

$$F = \frac{F_s \cdot R^2}{4(a - R_T)^2} = \frac{F_s \cdot R^2}{4(10^7 - 6{,}378 \cdot 10^6)^2} = 1{,}906 \cdot 10^{-14} F_s\, R^2$$

Applichiamo la formula di Pogson comparando la sfera col Sole e tenendo presente che la magnitudine della sfera dev'essere uguale a 6 (l'oggetto è appena visibile ad occhio nudo):

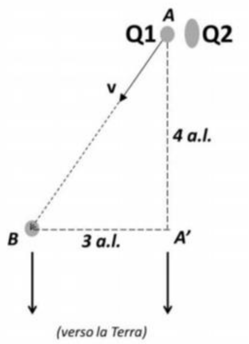
$$m - m_s = -2{,}5 \log\left(\frac{F}{F_s}\right) \quad \rightarrow \quad 6 + 26{,}74 = -2{,}5 \log(1{,}906 \cdot 10^{-14} R^2)$$

$$1{,}906 \cdot 10^{-14} R^2 = 10^{-13{,}1} \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{10^{-13{,}1}}{1{,}906 \cdot 10^{-14}}} m = 2{,}04\, m$$

Pertanto la sfera deve avere un diametro di 4,08 metri.

[N.B.: Nello svolgimento del problema si è usato lo stesso valore del flusso solare per la Terra e per la sfera; in realtà ciò è un'approssimazione, perché le distanze Terra-Sole e Sole-sfera sono diverse. Essendo però il semiasse dell'orbita della sfera trascurabile rispetto al semiasse della Terra, allora i due flussi sono assai simili.]

4. È stato osservato un quasar doppio che si trova a grandissima distanza dalla Terra. La particolarità di questo quasar è il moto di allontanamento delle due componenti Q1 e Q2. In particolare, Q1 si allontana da Q2 spostandosi, come riportato in figura, dal punto A al punto B, con velocità relativistica "v" pari al 75% della velocità della luce. Calcolare l'intervallo di tempo Δt impiegato dal componente Q1 a raggiungere il punto B e il corrispondente intervallo di tempo Δt' misurato dagli astronomi sulla Terra (che giace sullo stesso piano della figura). Sulla base del risultato ottenuto, di fronte a quale sconvolgente conclusione si sono trovati gli astronomi, prima di riuscire a spiegare correttamente il fenomeno? (Dalla Finale Nazionale 2015 Categoria Junior)



Soluzione: Il tratto AB è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABA' (vedi figura), quindi esso vale (Teorema di Pitagora).

$$AB = \sqrt{AA'^2 + A'B^2} = \sqrt{9+16} = 5a.l.$$

Esso viene quindi percorso nel tempo $\Delta t = \frac{AB}{v} = \frac{5a.l.}{0,75c} = 6,67\ anni$. Notiamo come non ci sia bisogno di conoscere il valore della velocità della luce perché le distanze sono espresse in anni luce.

Adesso analizziamo il fenomeno come viene visto dalla Terra. Quando Q1 si trova in A la luce da esso emessa impiega, per giungere in A', un tempo pari a $\frac{4a.l.}{c} = 4\ anni$. Nel frattempo Q1 si sposta e per arrivare in B impiega 6,67 anni. La luce che emette in B non deve più attraversare una distanza di 4 a.l., quindi i due segnali luminosi arrivano a una "distanza" temporale $\Delta t' = (6,67 - 4)anni = 2,67\ anni$.

Il risultato sconvolgente è che, siccome agli astronomi da Terra è sembrato che Q1 si spostasse lungo A'B, la sua velocità misurata da Terra risulta pari a:

$$v = \frac{A'B}{2,67anni} = \frac{3a.l.}{2,67anni} = 1,125c \text{ !!!}$$

Apparentemente il quasar si è spostato con una velocità superiore a quella della luce. Non è infatti raro osservare dei moti *superluminali* (cioè con velocità superiore a quella della luce) in oggetti che si muovono con velocità relativistiche; questa velocità è, tuttavia, sempre *apparente*.

5. Se una stella presenta un redshift z pari a 5,55 10^{-5}, quale sarà il verso e il valore della sua velocità radiale?

   Soluzione: il redshift è positivo, quindi la stella si allontana da noi. La velocità radiale della stella è data da:

$$v = cz = 3 \cdot 10^5 \cdot 5{,}55 \cdot 10^5 = 16{,}7 \frac{km}{s}$$

6. La lunghezza d'onda λ' di una delle righe più evidenti della luce emessa dalle galassie di una costellazione è 1,020 volte più grande della corrispondente lunghezza d'onda λ di riferimento. Calcolare la velocità con cui l'ammasso si sta allontanando dalla Terra e stimare la sua distanza.

   Soluzione: il redshift è:$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{(1{,}020-1)\lambda}{\lambda} = 0{,}020.$
   Pertanto: $v = 0{,}020c = 6000\frac{km}{s} \quad e \quad (legge\ di\ Hubble - Lemaitre)$:
   $d = \frac{v}{H} = 6000/71{,}9$=83,4 Mpc.

7. In una galassia, tutti gli ammassi globulari hanno un diametro pari a 50 anni luce. Nelle fotografie si misura il diametro angolare di tre di questi ammassi. I diametri risultano pari a 8',9',10'. Calcolare la distanza dei tre ammassi.

   Soluzione: le dimensioni reali di un oggetto visto sotto un angolo α alla distanza d sono date da:

$$D = 2d\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

   Da cui:

$$d_1 = \frac{D}{2\tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)} = \frac{50}{2\tan\left(\frac{0{,}1333}{2}\right)} = 21486 \text{ anni luce}$$

$$d_2 = \frac{D}{2\tan\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)} = 19099\ anni\ luce$$

$$d_3 = \frac{D}{2\tan\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)} = 17189\ anni\ luce$$

8. Se si dispone di un telescopio di 30 cm di diametro e lunghezza focale di 2 m, quali ingrandimenti saranno forniti da tre oculari di focale 25mm, 10 mm e 5mm? Se gli oculari hanno un campo apparente di 55°, quale sarà l'angolo di campo al telescopio? Calcolare pure la pupilla d'uscita.

   Soluzione: Calcoliamo l'ingrandimento:

$$I_1 = \frac{F}{f} = \frac{2000mm}{25mm} = 80x$$
$$I_2 = \frac{2000}{10} = 200x$$
$$I_3 = \frac{2000}{5} = 400x$$

   Il campo del telescopio sarà:

$$FoV_1 = \frac{FoV_{oc}}{i} = \frac{55°}{80} = 0{,}69°$$
$$FoV_2 = \frac{55°}{200} = 0{,}28°$$
$$FoV_3 = \frac{55°}{400} = 0{,}14°$$

   La pupilla d'uscita:

$$p_1 = \frac{300}{80} = 3{,}75mm \qquad p_2 = \frac{300}{200} = 1{,}5mm \qquad p_3 = \frac{300}{400} = 0{,}75mm$$

9. Calcolare l'apertura minima di un telescopio per poter riconoscere un granulo solare ampio 700km.

   Soluzione: L'estensione angolare di questo granulo è data da:

$$\alpha = 2\arctan\left(\frac{D}{2d}\right) = 2\arctan\left(\frac{700}{2\cdot 149{,}6\cdot 10^6}\right) = 0{,}97''$$

   Quindi, per la formula di Dawes: $D(mm) = \frac{120}{\alpha''}$ =12,4cm

10. Per realizzare una fotografia a vasto campo è stato necessario un tempo di posa di 13 minuti a f/3 con sensibilità 800 ISO. Determinare il tempo necessario per ottenere la stessa foto usando una sensibilità di 1000 ISO ed un'apertura relativa di f/4,5. Trascurare le perdite di sensibilità dovute al difetto di reciprocità delle pellicole.

Soluzione: il tempo di posa richiesto si ricava dalla formula:

$$T_2 = \frac{f_2^2\ S_1}{f_1^2\ \ S_2}\ T_1 \qquad T\ tempo, S\ sensibilit\grave{a}, f\ diaframma\ (apertura\ relativa)$$

$$T_2 = \frac{4{,}5^2\ \ \ 800}{3^2\ \ 1000}\ 13 = 23{,}4\ min$$

11. Determinare il tempo di posa massimo per ottenere stelle puntiformi senza inseguimento siderale con un obiettivo di 50 mm (di focale F) puntato su una zona di cielo avente declinazione media 45°. Il formato utilizzato è il 24x36mm.

Soluzione: La formula che permette di ottenere stelle puntiformi è:

$$T_{max} = \frac{600}{Fcos\delta} = 17 secondi$$

12. Un radiotelescopio ha apertura di 75 m. determinare il limite di diffrazione raggiungibile alla frequenza di osservazione di 410 MHz.

Soluzione: La lunghezza d'onda è data da:

$$c = \lambda\nu \qquad \lambda = \frac{c}{\nu} = 73{,}2\ cm$$

Il limite di diffrazione si ricava dalla formula di Rayleigh:

$$\vartheta = \frac{1{,}22\lambda}{D} = 1{,}22\frac{73{,}2}{7500} = 0{,}0119\ rad = 0{,}68° = 41'$$

13. Un radiotelescopio ha un diametro di 25m. calcolare il limite di diffrazione alla lunghezza d'onda di osservazione di 21 cm.

Soluzione: Per la formula di Rayleigh:

$$\vartheta = \frac{1{,}22\lambda}{D} = 1{,}22\frac{21}{2500} = 0{,}01 rad = 0{,}59° = 35{,}2'$$

14. Un telescopio riflettore ha diametro 1,5 m. calcolare il suo potere risolutivo massimo alla lunghezza d'onda dell'idrogeno ionizzato H_α=656,3nm.

Soluzione: Ancora una volta:

$$\vartheta = \frac{1{,}22\lambda}{D} = 1{,}22 * 656{,}3\frac{10^{-9}}{1{,}5} = 5{,}3\ \ 10^{-7} rad = 0{,}11''.$$

15. Consideriamo due stelle, la prima (S1) ha magnitudine apparente m1=11 e si trova a una distanza L1 dalla Terra; la seconda, S2, ha luminosità intrinseca identica a S1, ma si trova a una distanza tripla rispetto a S1. Che magnitudine apparente ha la stella S2? Se abbiamo a disposizione uno specchio di diametro D1 con cui si riesce a vedere a malapena S1, quanto deve essere il diametro del secondo telescopio D2 che permetta di vedere a malapena la stella S2?

    Soluzione: Siccome la luminosità intrinseca è la stessa ma la distanza della seconda stella è tripla, il flusso della seconda stella è uguale a un nono del flusso della prima. Quindi, applicando la formula di Pogson:

    $$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log\left(\frac{F_1}{2}\right) = -2{,}5 \log 9 = -2{,}39$$

    $$m_2 = 11 + 2{,}39 = 13{,}39$$

    Infine, poiché per osservare S2 dobbiamo essere in grado di rivelare il flusso che è 9 volte minore e che l'area di uno specchio aumenta con il quadrato del raggio, il raggio dello specchio D2 dev'essere 3 volte più grande di quello di D1.

16. Calcolare la magnitudine limite visuale limite raggiungibile con un telescopio di diametro D=25cm.

    Soluzione: Applicando la formula per trovare la magnitudine limite (con il diametro espresso in cm) troviamo:

    $$m = 6{,}8 + 5logD = 6{,}8 + 5log25 = 13{,}8$$

17. Calcolare l'apertura necessaria per poter osservare stelle fino a una magnitudine limite visuale di +16 con un telescopio.

    Soluzione: Applicando la formula precedente:

    $$m = 6{,}8 + 5logD \qquad D = 10^{\frac{m-6{,}8}{5}} = 10^{1{,}84} = 69{,}2\ cm$$

18. In un sistema stellare, una stella ruota attorno ad un'altra su un'orbita circolare con velocità 45 km/s. il suo periodo di rivoluzione è 300 giorni. Determinare il raggio dell'orbita e la massa della stella centrale.

Soluzione: la velocità orbitale è data da:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \qquad da\ cui \quad R = \frac{vT}{2\pi} = \frac{45000 \cdot\ 2{,}592 \cdot 10^7}{6{,}2831} = 1{,}856\ \cdot 10^{11} m$$

Dalla Terza legge di Keplero:

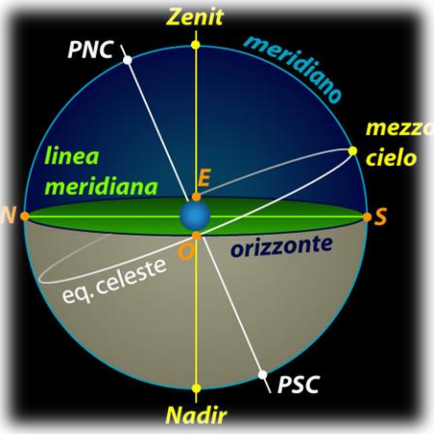
$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = 5{,}632 \cdot 10^{30} kg.$$

La SFERA e la TRIGONOMETRIA SFERICA

Premessa

Nella **geometria piana** i concetti base sono il **punto** e la **retta**.

Su una sfera, i **punti** sono definiti nel senso **usuale**. Le **rette** sono definite come **cerchi massimi**. Data una sfera si definisce **circonferenza massima** ogni circonferenza che si ottiene intersecando la superficie sferica con un piano passante per il centro della sfera. L'**equatore celeste** è un circolo massimo mentre i paralleli di declinazione non lo sono. L'**orizzonte astronomico** è un circolo massimo mentre non lo sono gli almucantarat o paralleli di altezza.



Elementi della sfera

Superficie sferica

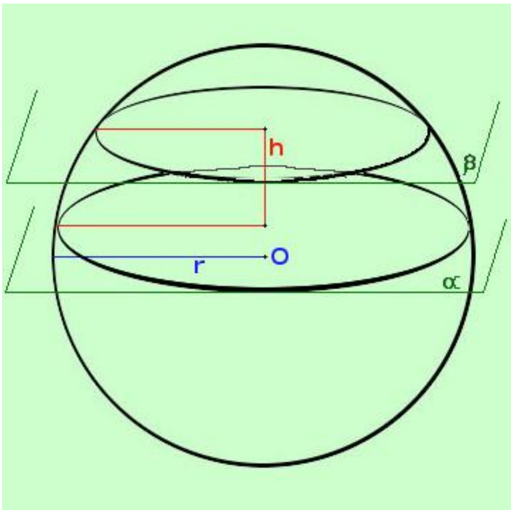
Si chiama superficie sferica la **figura generata da una semicirconferenza in una rotazione completa attorno al suo diametro**. Possiamo anche definirla come luogo geometrico. La superficie sferica è il luogo geometrico dei **punti** dello spazio che hanno **distanza** dal **centro** pari al **raggio**.

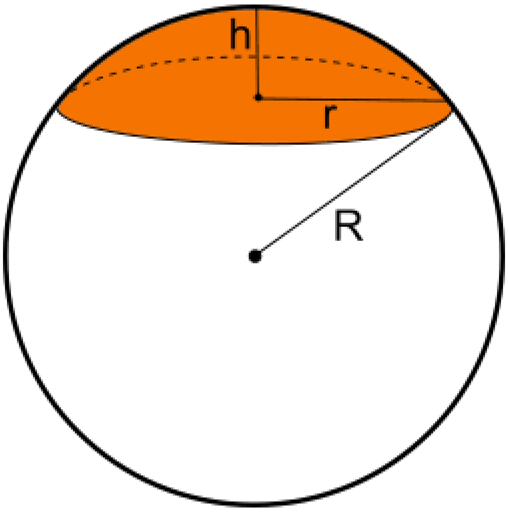
Sfera

Si chiama sfera la **figura generata da un semicerchio di una rotazione completa attorno al suo diametro**. Definita come luogo geometrico è il luogo dei **punti** dello spazio la cui **distanza** dal **centro** è **minore o uguale al raggio**.

Zona sferica

Si chiama zona sferica la parte di superficie sferica compresa fra due piani paralleli **α** e **β** che intersecano la sfera. Le circonferenze sezioni si chiamano basi della zona. L’altezza è la distanza tra i due centri delle circonferenze sezioni.





Corda

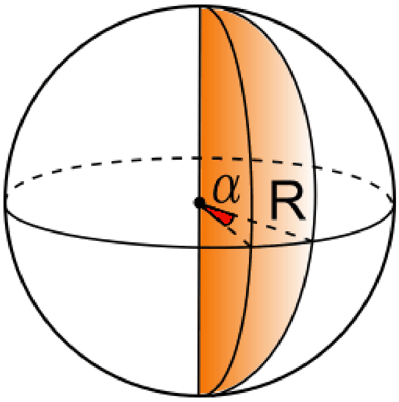
Si chiama corda un **segmento i cui estremi appartengono alla superficie sferica**.
Si chiama **diametro** una **corda passante per il centro** della superficie sferica e della sfera.

Segmento sferico a due basi

Definiamo segmento sferico a due basi la parte di sfera compresa fra due piani paralleli **α** e **β** secanti la sfera stessa

Calotta Sferica

Definiamo calotta sferica ognuna delle due parti in cui una superficie sferica viene divisa da un piano secante α. La calotta è la porzione di superficie sferica ottenuta per sezione con il piano α.



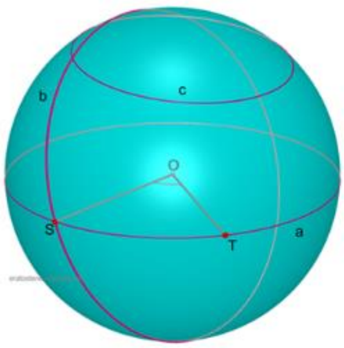
Segmento sferico ad una base

Il segmento sferico ad una base è ognuna delle due parti in cui una sfera viene divisa da un piano secante α, il segmento è la porzione di sfera compresa tra il piano e la calotta.

Fuso sferico

La parte di superficie sferica limitata da due circonferenze massime, di sezione dei semipiani α e β con la superficie sferica.

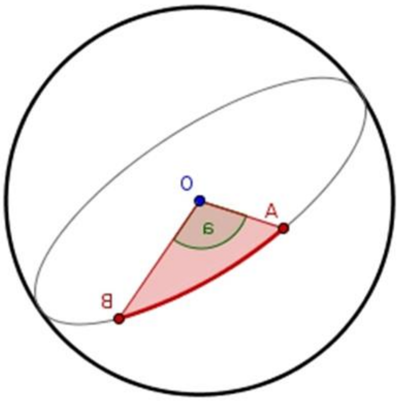
Spicchio sferico



Lo spicchio sferico è il solido delimitato da due piani meridiani passanti per uno stesso diametro e dalla porzione di superficie sferica (fuso sferico) a essi corrispondente

Presi due punti distinti su una sfera per essi passa
una ed una sola circonferenza massima.
Dati due punti A e B, distinti, su una sfera, esiste una ed una sola circonferenza massima che li contiene, i due punti individuano su questa circonferenza due archi, il minore di essi si chiama distanza sferica rappresenta una **geodetica**. (La geodetica è la linea che realizza, su una data superficie, il minimo percorso fra due punti assegnati).

Nella geometria sferica la circonferenza massima gioca lo stesso ruolo della retta nella geometria piana.

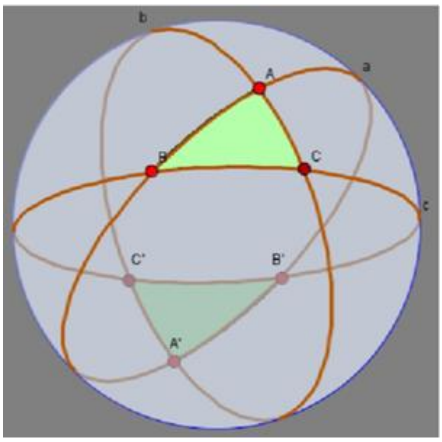


La lunghezza di questo arco è proporzionale al raggio della sfera e all'angolo al centro AOB. Se AOB è espresso in radianti:

AB = OA x AÔB

Triangolo sferico:

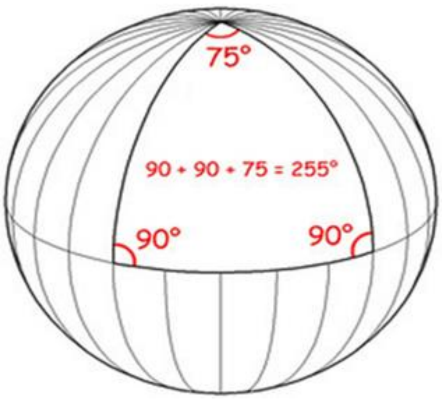
Si definisce triangolo sferico la superficie sulla sfera limitata da tre archi di circolo massimo passanti per tre punti detti **vertici**; tali punti non devono appartenere allo stesso circolo massimo e gli archi non devono avere alcun punto d'intersezione al di fuori dei vertici.



Lati del triangolo sferico:

*S*ono le **lunghezze degli archi AB, BC, CA** che limitano la superficie. Tali lati sono minori o uguali a 180.

Angoli del triangolo sferico:



Sono gli angoli formati dai tre archi di circolo massimo. La somma degli angoli (interni) è maggiore di 2 angoli retti e minore di 6 angoli retti

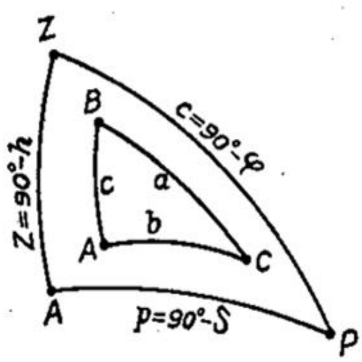
$$180° < \alpha+\beta+\gamma < 540°$$

Pertanto, la somma degli angoli è 180° solo quando il triangolo è **degenere**, ovvero quando i vertici del triangolo sono situati sullo stesso circolo massimo.

La differenza fra la somma dei tre angoli di un triangolo sferico e l'angolo piatto, si dice **eccesso sferico**:

$$\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma - 180°$$

Nel triangolo sferico sussistono relazioni fra le funzioni trigonometriche dei lati e degli angoli: tali relazioni sono date dai **teoremi di Eulero** (teorema del coseno ( ) per i triangoli sferici e teoremi dei seni( )), da cui derivano **due gruppi fondamentali di relazioni** che prendono il nome di **primo e secondo gruppo di Gauss** di cui ci occuperemo nella trattazione del triangolo di posizione astronomico. L'applicazione dei triangoli sferici assume particolare importanza in astronomia in quanto, come abbiamo visto nei sistemi di riferimento, sulla sfera celeste si misurano solo distanze angolari.



Per un lato:

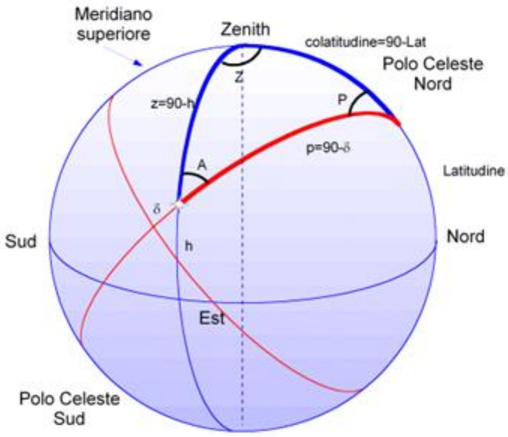
$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)} = \frac{\sin(b)}{\sin(B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(C)}$$

Oppure:

$$\sin(a) : \sin(A) = \sin(b) : \sin(B) = \sin(c) : \sin(C)$$

Triangolo di posizione astronomico



Vertici del triangolo

Il triangolo astronomico o di posizione ha i vertici **nell'astro**, nello **zenit** e nel **polo celeste nord**; il terzo vertice potrebbe essere anche l'altro polo, ma per convenzione è preferibile usare quello nord in quanto semplifica le regole algebriche per il calcolo delle lunghezze dei lati.

Lati del triangolo

I lati del triangolo hanno lunghezze comprese fra 0 e 180 definite come segue:

- <u>Distanza polare p = 9 - δ</u>
  la distanza che l'astro ha dal polo di riferimento (polo celeste nord, per convenzione). Considerando la declinazione δ positiva se a Nord e negativa se Sud; la distanza polare è p < 90 nel primo caso e p > 90 nel secondo.

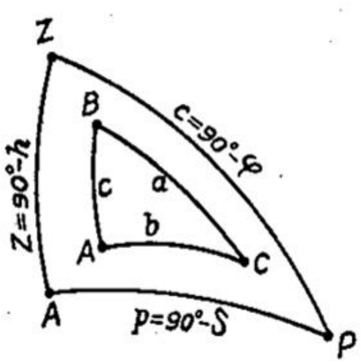
- <u>Colatitudine c = 9 - φ</u>
  coincide con la colatitudine, ossia il complemento della latitudine. Si ricorda che l'elevazione dell'asse polare è esattamente pari alla latitudine del luogo. La precedente convenzione per la declinazione può essere adottata anche per la latitudine per cui si ha c < 90 per latitudini nord e c > 90 per quelle sud.

- <u>Distanza zenitale z = 90 - h</u>
  Coincide con la distanza zenitale z, ossia la distanza che l'astro ha dallo zenit. Tale distanza è il complemento dell'altezza h (z = 90-h). Se l'astro è nell'emisfero visibile si ha h > 0 e z < 90, per astri nell'emisfero invisibile si ha h < 0 e z > 90.

I tre angoli sono:

1) **Angolo vertice nello Zenith**, compreso tra meridiano e cerchio verticale; la sua ampiezza dovrebbe corrispondere all'azimuth, ma in questo caso, poichè l'ampiezza degli angoli nei triangoli sferici è sempre inferiore a 180°, prende nome di Angolo azimutale **Z**.

2) **Angolo vertice nel Polo Celeste**, compreso tra meridiano e cerchio orario; la sua ampiezza corrisponderebbe all'angolo orario, ma in questo caso, poiché l'ampiezza degli angoli nei triangoli sferici è sempre inferiore a 180°, prende nome di Angolo al Polo **P.**



3) **Angolo con vertice nell'oggetto** A

Attraverso le seguenti relazioni note come **primo e secondo gruppo di Gauss:**

$$\begin{cases} \sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H \\ \cos h \cos A = \cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos H \\ \cos h \sin A = \cos\delta \sin H \end{cases}$$

Primo Gruppo di Gauss

$$\begin{cases} Sin\,\delta = Sin\,\varphi\, Sin\, h - Cos\,\varphi\, Cos\, h\, Cos\, A \\ Cos\delta\, cosH = senh\, cos\phi + cosh\, sen\phi\, cosA \\ Cosh\, senH = cosh\, senA \end{cases}$$

Secondo gruppo di Gauss

E' possibile risolvere il triangolo astronomico.

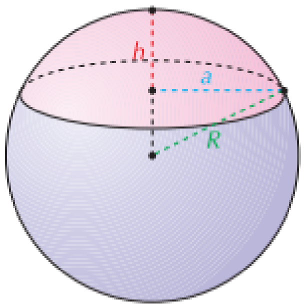
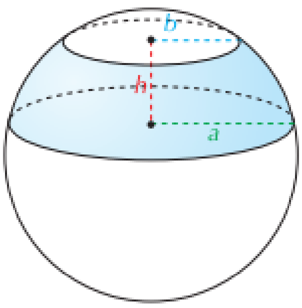
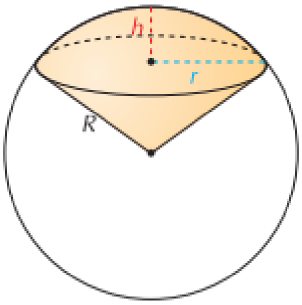
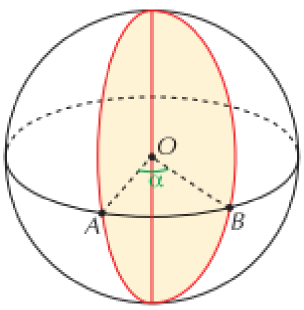
Notiamo che nel triangolo di posizione sono contemporaneamente presenti, per l'oggetto celeste osservato, le sue coordinate altazimutali (azimuth o angolo zenitale e altezza o distanza zenitale) e quelle equatoriali orarie (angolo orario o angolo al polo e declinazione o distanza polare). Queste formule ci consentono il passaggio da coordinate altazimutali ad equatoriali orarie e viceversa.

Queste ci consentono il passaggio da un sistema altazimutale ad equatoriale

$$\begin{cases} \sin\delta = \sin\varphi \cos z - \cos\varphi \sin z \cos A \\ \cos\delta \cos H = \cos\varphi \cos z + \sin\varphi \sin z \cos A \\ \cos\delta \sin H = \sin z \sin A \end{cases}$$

Le parti della sfera

Riportiamo in una tabella le caratteristiche delle parti in cui rimane divisa una superficie sferica e una sfera di raggio R quando vengono sezionate con opportuni piani, indicando anche le formule per il calcolo delle corrispondenti superfici e volumi.

CARATTERISTICHE	RAPPRESENTAZIONE GRAFICA	SUPERFICIE	VOLUME
Calotta sferica: ciascuna delle due parti in cui un piano divide la superficie sferica **Segmento sferico a una base:** ciascuna delle due parti in cui un piano divide una sfera		$S = 2\pi Rh$	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$
Zona sferica: parte della superficie sferica delimitata da due piani paralleli **Segmento sferico a due basi:** parte della sfera delimitata da due piani paralleli		$S = 2\pi Rh$	$V = \frac{1}{2}\pi h(a^2 + b^2) + \frac{1}{6}\pi h^3$
Settore sferico: parte di sfera generata dalla rotazione di un settore circolare attorno al suo asse di simmetria		$S = \pi R(2h + r)$	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$
Fuso sferico: parte della superficie sferica delimitata da due semipiani uscenti da un diametro **Spicchio sferico:** parte della sfera delimitata dagli stessi due piani		$S = 2R^2\alpha$ con α ampiezza in radianti del diedro formato dai due piani	$V = \frac{2}{3}R^3\alpha$ α in radianti

FONTE: ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

ALCUNE ESERCITAZIONI DI TRIGONOMETRIA SFERICA:

1) *Calcolo dell'altezza di un oggetto alla culminazione superiore ed inferiore:*

Già conosciamo le formule che ci permettono di determinare l'altezza di un astro sull'orizzonte nel caso di culminazione superiore ed inferiore: per semplicità le riportiamo qui di seguito:

Culminazione superiore	la stella culmina a sud dello zenit	la stella culmina a nord dello zenit
ALTEZZA	h= 90 - ϕ + δ	h= 90 + ϕ - δ

Proviamo, attraverso le formule contenute nella parte teorica di trigonometria sferica, a verificare queste relazioni:

Consideriamo la prima equazione del primo gruppo (▶*Primo Gruppo di Gauss*):

sin h = sin φ sin *δ* + cos φ cosδ cos *H*

Se la stella culmina, vuol dire che essa passa al meridiano (o superiore o inferiore a seconda della culminazione):

CULMINAZIONE SUPERIORE:
Quando la Stella passa al meridiano superiore l'angolo orario H è = 0 il cos0° =1, per cui si ha :

sin h = sin φ sin *δ* + cos φ cosδ

questa equazione si risolve facilmente se si applicano le formule di sottrazione del coseno:

cos (α - β) = cosαcosβ + senαsenβ

La nostra equazione può essere scritta: **sen h = cos(φ - δ)** –l' α della formula di sottrazione è la latitudine e la β la declinazione)- , ma il **sen h=cos(90 –h)** ed allora:

cos (90-h) = cos(φ - δ) : questa è una *equazione elementare in coseno* che ha per soluzioni:

90-h= ± (φ - δ)

90-h= + (φ - δ) ; h= 90 - ϕ + δ
90-h= - (φ - δ) ; h= 90 + φ - δ
(Le relazioni sono due perché ognuna vale per un emisfero)

CULMINAZIONE INFERIORE:
Anche qui sappiamo che : **h= ϕ + δ- 90**

sin h = sin φ sin δ + cos φ cosδ cos H

Alla culminazione inferiore l'angolo orario è 12^h quindi 180°: il *cos 180° = -1*

sin h = sin φ sin δ - cos φ cosδ

Non possiamo applicare come prima a formula di addizione del coseno! e quindi la riscriviamo:

sin h= - (- sin φ sin δ + cos φ cosδ)

ricordando che *cos (α + β) = cosαcosβ – senαsenβ* ed essendo *sinh= cos(90-h)* possiamo scrivere: cos (90-h) = - cos(ϕ + δ) ; <u>essendo *cosα= - cos(180 –α)*</u> :

cos (90-h) = cos(180 – ϕ - δ)

90-h = 180 – ϕ - δ ; h= ϕ + δ- 90

N.B.: Essendo il coseno di due angoli dello stesso valore assoluto ma di segno opposto uguale, come fatto sopra anche la soluzione col segno negativo va presa: quindi si ottengono anche qui due formule, che, come sopra, si riferiscono ciascuna a un emisfero.

2) *Calcolare l'espressione che consente di determinare il sorgere e il tramontare di un astro. Successivamente, determinare la differenza delle ore di luce ai solstizi a Reggio Calabria – Latitudine φ=38°6' Nord.*

Per rispondere alla prima domanda dobbiamo determinare l'angolo orario: *applichiamo il*

(▶) *Primo Gruppo di Gauss:*

sin h= sin φ sin δ + cos φ cos H cos δ

isoliamo il cosH : si trova cosH= $\frac{sinh - sin\varphi sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$ e scriviamo ancora :cosH = $\frac{\sin h}{\cos\varphi\cos\delta}$ - $\frac{\sin\varphi\ \sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$ ed ancora cosH = $\frac{\sin h}{\cos\varphi\ \cos\delta}$ – tanφ tanδ (essendo tanα=senα/cosα)

Al momento del sorgere dell'astro h= 0 quindi cosH = - tanφ tanδ (sen0=0)

Se è nota l'ascensione retta possiamo calcolare il tempo siderale : $\boldsymbol{T_s}$ **= H +$\boldsymbol{\alpha}$ con H=arccos(θ$\frac{\sin h}{\cos\varphi\ \cos\delta}$ – tanφ tanδ).** *Se conosciamo il valore del tempo siderale in una determinata ora di un determinato giorno, possiamo anche trovare l'istante di tempo che segna il nostro orologio per il sorgere del Sole (per questi calcoli si vedano i problemi precedenti sul tempo).* **c** = *H+α*
Una volta trovata l'espressione dell'angolo orario la seconda domanda si risolve facilmente tenendo conto che l'angolo orario adesso è $\frac{H}{2}$.

$$\cos\frac{H}{2} = -\tan\varphi \cdot \tan\delta$$

Il Sole ai solstizi ha una declinazione δ=+23°27' (21 giugno, solstizio d'estate) e δ=-23°27' (21 dicembre, solstizio d'inverno).

si trova che: cos $\frac{H}{2}$ = -0,784 · 0,433 = -0,34, perciò H=2arccos(-0.34)=219°46'=*14 ore 39 minuti* (dì più lungo dell'anno);

mentre il 21 dicembre cos $\frac{H}{2}$ = (-0,784) · (-0,433) = 0,34 dal quale si ricava che H=arccos(0.34)=140°15' = 9 ore 21 minuti (dì più corto dell'anno); la differenza di ore è ∆H=14h 39m-9h 21m = 5 ore 18 minuti tra inverno ed estate.

3) *In un certo giorno, in cui è in vigore l'ora legale, in una città, posta alla longitudine di λ = 10° 52' 59" E, e latitudine φ = 44° 38' 45" N il Sole ha una declinazione $\delta_{\odot}$ = 10° 59' 04".Considerando trascurabile la declinazione del Sole durante l'arco della giornata,*

Calcolare:

1. *l'altezza massima raggiunta dal Sole in quella località e l'ora del transito in meridiano;*
2. *l'ora in cui, in tale giorno, il sole sorge e tramonta in quella Città e l'arco diurno;*
3. *l'azimut del sole nei momenti in cui sorge e tramonta.*

Il sole raggiunge la massima altezza h_C sull'orizzonte (culmina) quando transita per il meridiano locale dell'osservatore. Nel caso specifico avremo: $h_C = 90° - (\varphi - \delta_{\odot}) = 90° - \varphi + \delta_{\odot} = 90° - 44°.64583333 + 10°.98444444 = 56°.33861111$

L'altezza massima del Sole , nel momento in cui transita al meridiano è; h_C = 56°.33861111 = 56° 20' 19"

Indichiamo adesso con λ la longitudine espressa in ore e con ΔT la differenza in ore del meridiano locale rispetto a GMT. Nel nostro caso essendo in vigore l'ora legale, sarà $\Delta T = 2^h$. Le 12^h locali corrispondono dunque a:***U.T.*** $= 12^h - \lambda$

per cui, l'ora locale del transito in meridiano del sole sarà (scrivendo la longitudine in notazione decimale):

$$T_C = 12^h - \lambda + \Delta T = 12^h - \frac{10^{\circ}.8830555556}{15^{\circ}} + 2^h = 2^h - 0^h.725537036 + 2^h = 13^h.27446296$$

il Sole culmina alle ore locali: $T_C = 13^h\ 16^m\ 28^s.1$

I due eventi del sorgere e tramontare si verificano quando il sole interseca l'orizzonte celeste dell'osservatore, e quindi la sua altezza h è nulla. In questo caso, è possibile determinare i tempi (gli angoli orari H_S e H_T) e le direzioni (gli *azimut* A_S e A_T) delle due posizioni del sole sull'orizzonte e l'arco diurno

$\Delta T = H_T - H_S$ che ci dà la durata della permanenza del sole

Applichiamo le formule del primo gruppo di Gauss al triangolo sferico precedentemente definito rispetto al lato "*zenit* – sole" ed all'angolo al vertice con lo *zenit*.

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H \qquad \text{(I)}$$

$$\cos h \sin A = -\cos\delta \sin H \qquad \text{(II)}$$

$$\cos h \cos A = \cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos\delta \cos H$$

Quando il sole sorge e/o tramonta, si ha: $\boldsymbol{h}$ = 0 e quindi $\sin \boldsymbol{h}$ = 0. Dalla (I) segue dunque:

$\cos \boldsymbol{H} = -\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta_{\odot}$ Dai dati del problema si ha: φ = 44° 38' 45" N = 44°.64583333

$\delta_{\odot}$ = 10° 59' 04".1 = 10°.98444444 segue: $\cos \boldsymbol{H}$ = **-** tg (44°.64583333) *tg* (10°.98444444) = - 0.191713689

$\boldsymbol{H}$ = *arccos* (- 0.191713689) = 101°.0528101 = ± 6^h.736854006

L'angolo orario $\boldsymbol{H}$ è negativo al sorgere perché deve arrivare in meridiano, e positivo al tramonto perché ha superato il meridiano. Sarà dunque: $\boldsymbol{H_S}$ = - 6^h.736854006 $\boldsymbol{H_T}$ = 6^h.736854006

il sole sorgerà dunque alle ore: $\boldsymbol{T_S} = \boldsymbol{T_C} + \boldsymbol{H_S}$ = 13^h.27446296 - 6^h.736854006 = 6^h.537608954 = $6^h\ 32^m\ 15^s$.4

Lo stesso giorno il sole tramonterà alle ore: $\boldsymbol{T_T} = \boldsymbol{T_C} + \boldsymbol{H_T}$ = 13^h.27446296 6^h.736854006 = 20^h.01131697 = $20^h\ 00^m\ 40^s$.7

L'intervallo temporale durante il quale il sole resterà sopra l'orizzonte sarà:

$\Delta \boldsymbol{T} = \boldsymbol{H_T} - \boldsymbol{H_S}$ = 6^h.736854006 + 6^h.736854006 = 13^h.47370802 = $13^h\ 28^m\ 25^s$.4

Per ricavare l'*azimut* del sole nei momenti in cui sorge e tramonta, utilizziamo la (III) delle formule di Gauss: $\cos \boldsymbol{h} \sin \boldsymbol{A} = -\cos \delta \sin \boldsymbol{H}$

Nel momento in cui il sole sorge e tramonta si ha $\boldsymbol{h}$ = 0 e quindi $\cos \boldsymbol{h}$ = 1, per cui si ha, rispetto al punto Nord:

$\sin \boldsymbol{A_S} = -\cos \delta_{\odot} \sin \boldsymbol{H_S}$ = - *cos* (10°.98444444) *sin* (-6^h.736854006 x 15) = 0.963469686

$\boldsymbol{A_S}$ = *arcsin* (0.963469686) = 74°.46556891 = 74° 27' 56".1

$\sin \boldsymbol{A_T} = -\cos \delta_{\odot} \sin \boldsymbol{H_T}$ = - *cos* (10°.98444444) *sin* (6^h.736854006 x 15) = -0.963469686

$\boldsymbol{A_T}$ = *arcsin* (-0.963469686) = - 74°.46556891 = (360° - 74°.46556891) = 285°.5344311 = 285° 32' 4"

DISTANZA TRA DUE STELLE:

Regolo ha coordinate H= 27m 4 s e declinazione 11° 52' 5". Denebola ha coordinate H= 22h 46m 36s e declinazione 14° 27' 33". Si determini la loro distanza angolare.

Per calcolare la loro distanza consideriamo il triangolo sferico BPA dalla figura si evince che

PB= 90-δ_1 PA= 90-δ_2 l'angolo al polo P= H_2 - H_1.

Applichiamo il teorema del coseno o di Eulero:

cosAB= cosPB cosPA + seno senPA cosP

Sostituendo:

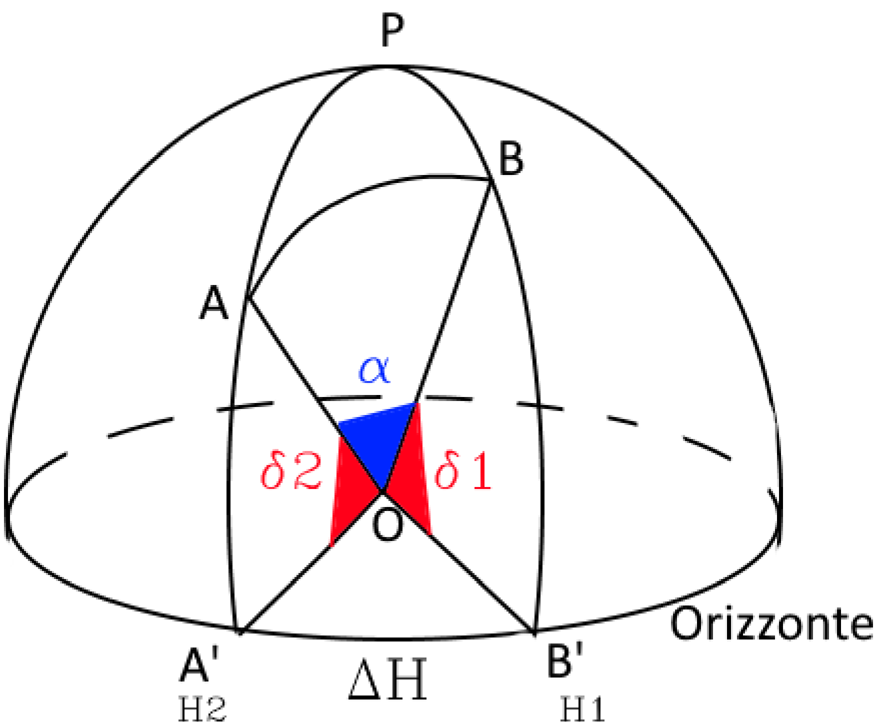
Cosα = cos(90-δ_1).cos(90-δ_2) + sen(90-δ_1).sen(90-δ_2)cosP

Cosα= senδ_1.senδ_2 + cosδ_1.cos δ_2.cos $(H_2 - H_1)$

E svolgendo I calcoli:

Cos α= sen11,8681 sen 14,4592 + cos 11,8681 cos 14,4592 cos25,1167=0,904

α=24°,58



Bibliografia:

Vittorio Castellani, Astrofisica Stellare – Zanichelli Editore

Ferdinando Flora, Astronomia Nautica – Editore Hoepli

Pietro Giannone, Elementi di Astronomia – Edizione Pitagora

Angeletti Giannone, Esercizi e complementi di astronomia – Edizioni Nuova Cultura

Margherita Hack, Corso di Astronomia – Editore Hoepli

Halliday-Resnick, Fondamenti di fisica – Zanichelli Editore

Giuliano Romano, Introduzione all'astronomia – Editore Muzzio

Leonido Rosino, Lezioni di Astronomia – Edizione Cedam

Francesco Saverio Delli Santi, Introduzione all'astronomia – Zanichelli Editore

Cino Tacchini, Il Cielo – UTET Editore

Francesco Zagari, Astronomia sferica e teorica – Zanichelli Editore

Wikipedia, sito web

Vialattea.net, sito web

Treccani, sito web

Superfici e volumi problemi di massimo e minimo, Istituto Italiano Edizioni Atlas